14

P DICTAAT TOEGEPASTE MECHANICA / DRAAGCONSTRUCTIES

BIJZONDERE BALKCONSTRUCTIES

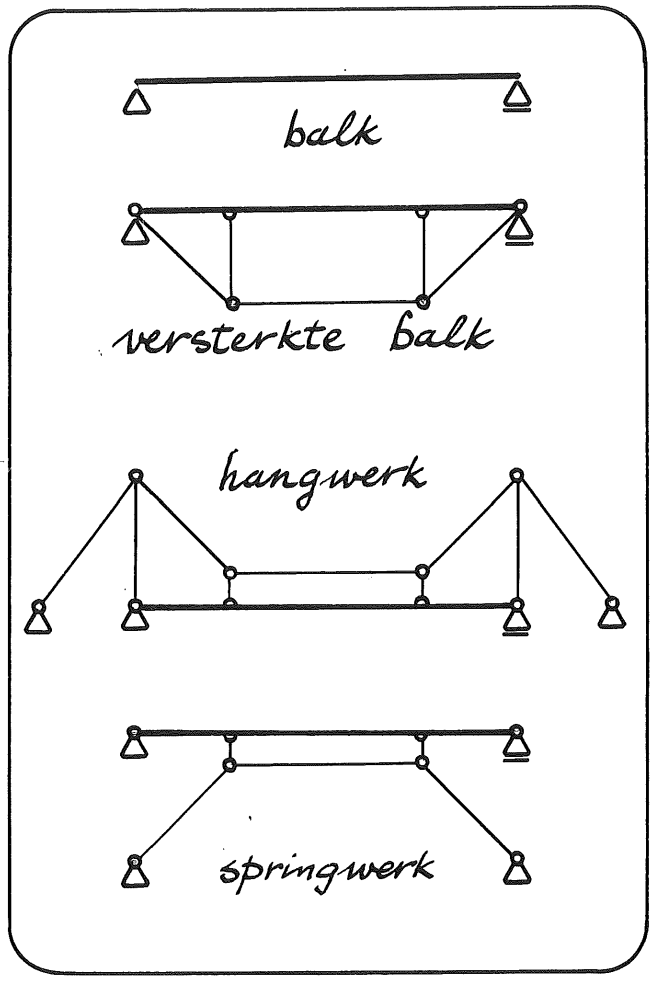
TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
AFDELING BOUWKUNDE

VAKGROEP TOEGEPASTE MECHANICA /
/ DRAAGCONSTRUCTIES

PROF.IR. D. DICKE / IR. W.A. EISMA

FEBRUARI 1978

14 BIJZONDERE BALKCONSTRUCTIES



Een balkconstructie waarbij het draagvermogen van een balk wordt vergroot door het aanbrengen van een eenvoudig systeem van scharnierend aan elkaar verbonden staven noemen we een versterkte balk.

We gaan ons bezighouden met versterkte balken en zullen nagaan hoe de krachtsverdeling in deze balken kan worden bepaald.

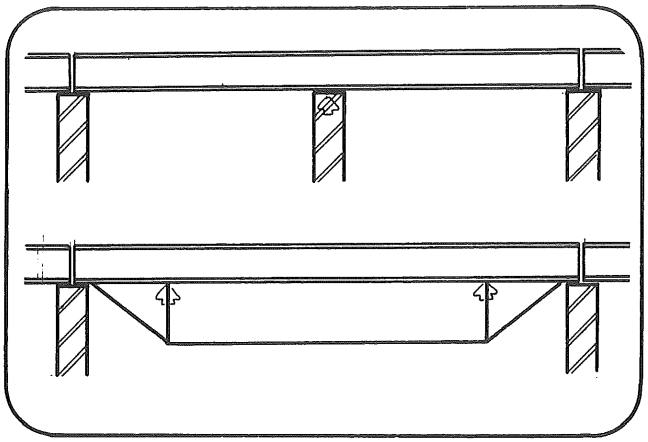
Een balkconstructie waarbij het draagvermogen van een balk wordt vergroot door het aanbrengen van een eenvoudig systeem van staven dat wordt opgehangen aan of ondersteund door daartoe aangebrachte steunpunten, noemen we een hangwerk resp. springwerk.

De bepaling van de krachtsverdeling in hang- en springwerken vertoont veel overeenkomst met die van versterkte balken.

Versterkte balken, hang- en springwerken beschouwen we als bijzondere balkconstructies. We gaan ons met deze bijzondere balkconstructie bezighouden.

Balken die door de lengte van hun overspanning of door de belasting die zij moeten dragen niet of niet meer voldoende draagvermogen bezitten kunnen worden versterkt door het aanbrengen van een systeem van staven.
Versterkte balken worden soms toegepast in eenvoudige draagconstructies en als hulpconstructies tijdens de bouw.

Hang- en springwerken komen meer voor in de bruggenbouw en soms als hulpconstructie tijdens de bouw.

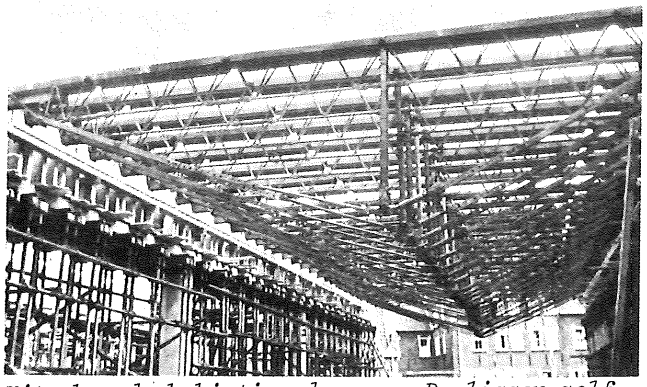


Versterkte balken kunnen ook worden toegepast bij restauratiewerkzaamheden wanneer, b.v. door het slopen van een muur, het draagvermogen van de vloerbalken niet meer voldoende is door de grotere lengte van de overspanning.

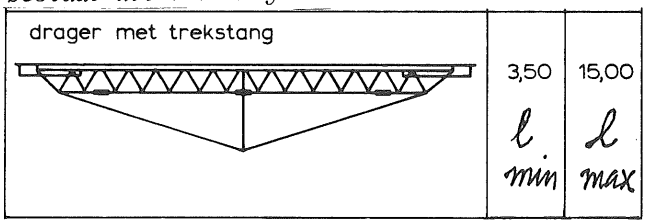
Hangwerken vertonen qua vorm enige overeenkomst met kabelconstructies (hoofdstuk 15). Springwerken vertonen qua vorm enige overeenkomst met boogconstructies en driescharnierspanten (hoofdstuk 16 en 17).

Dit hoofdstuk is opgebouwd uit:

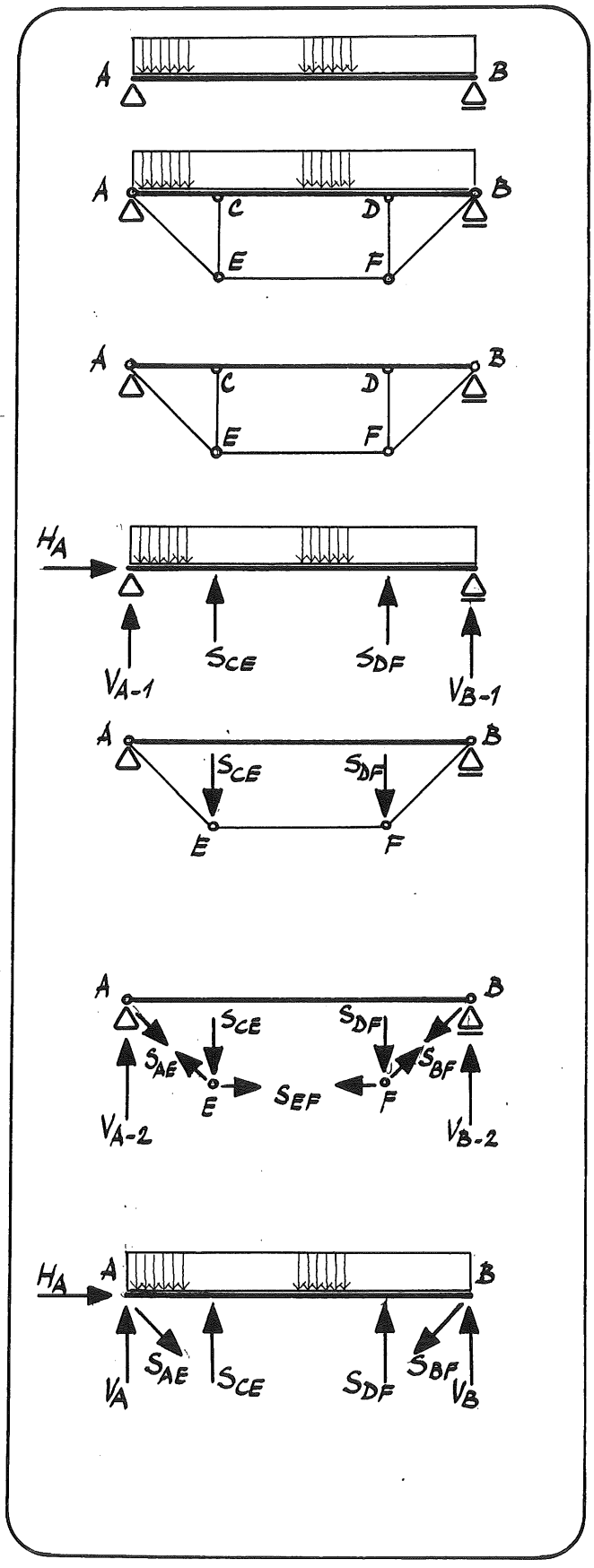
1. versterkte balken
2. andere constructies
3. zelftoets
4. voorbeelden
5. vraagstukken



Uitgebouwde bekistingsdragers. De ligger zelf bestaat uit V-vormige vakwerkelementen.



1. VERSTERKTE BALKEN



We kunnen het draagvermogen van een balk AB vergroten door aan de onderzijde van deze balk de staven AE, EF, FB, CE en DF aan te brengen. Deze staven worden scharnierend met elkaar en met de balk verbonden.

Balk AB wordt zodoende niet alleen door de opleggingen in A en B ondersteund maar ook door de staven CE en DF in C en D.

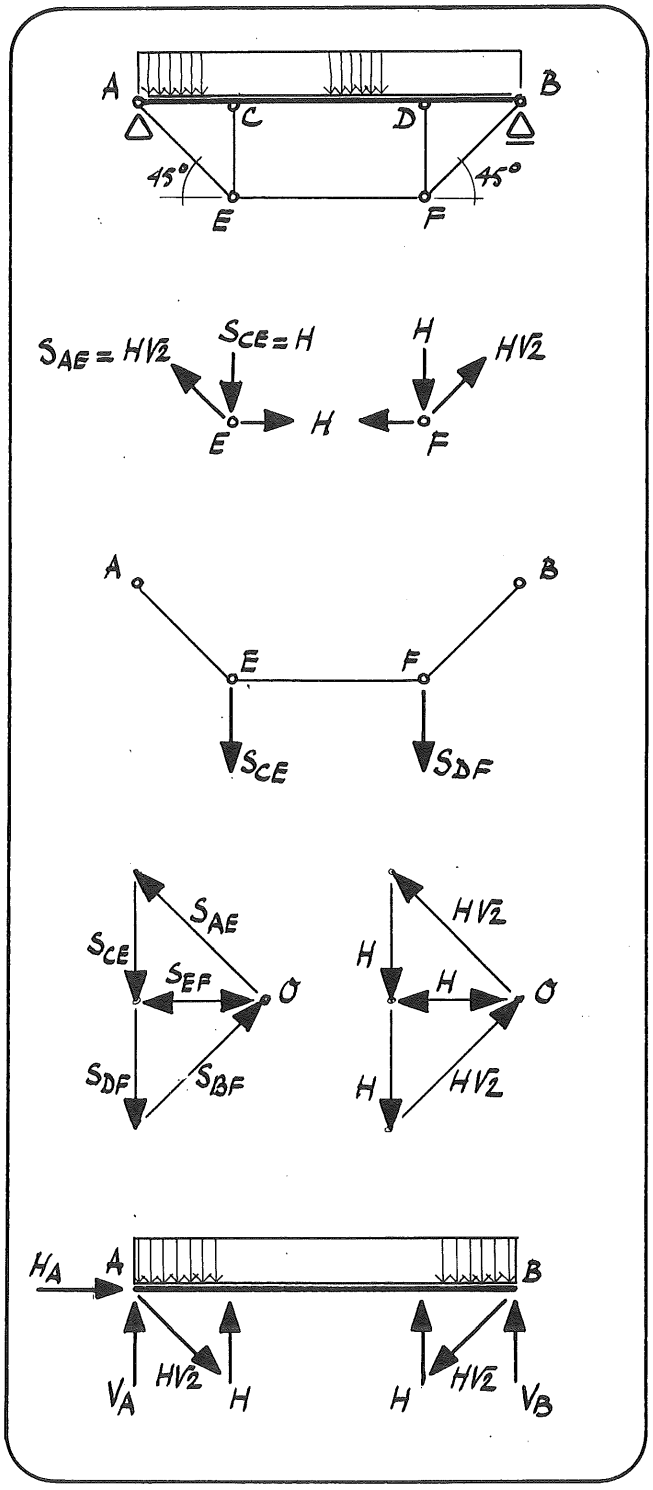
Tengevolge van de belasting van balk AB ontstaan in de opleggingen de reactiekrachten H_A, V_{A-1} en V_{B-1} en in de staven CE en DF de krachten S_{CE} en S_{DF}.

De staven CE en DF worden op hun beurt weer ondersteund door het staafsysteem AEFB. De ophangpunten A en B van dit systeem worden gekoppeld door balk AB, die als drukstaaf fungeert.

Het staafsysteem AEFB met drukstaaf AB wordt belast door de krachten S_{CE} en S_{DF}. Tengevolge van deze belasting ontstaan in de opleggingen A en B de reactiekrachten V_{A-2} en V_{B-2} en in de staven AE, EF en BF de trekkrachten S_{AE}, S_{EF} en S_{BF}.

We zien dus dat balk AB wordt belast door:
- de uitwendige krachten tengevolge van de belasting
- de reactiekrachten H_A, V_A en V_B in de opleggingen A en B
  waarbij geldt:
  $V_A = V_{A-1} + V_{A-2}$
  $V_B = V_{B-1} + V_{B-2}$
- de staafkrachten S_{AE}, S_{CE}, S_{DF} en S_{BF}

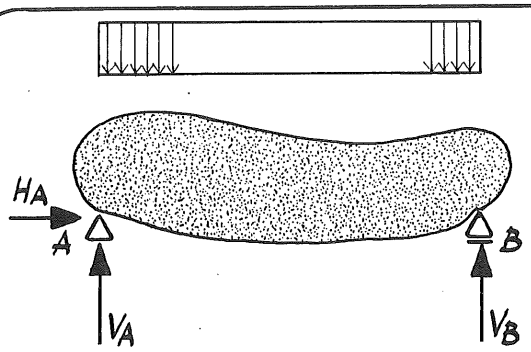
Een balk die behalve door zijn opleggingen nog wordt ondersteund door een systeem van staven noemen we een <u>versterkte balk</u>.



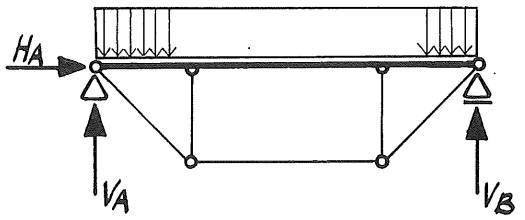
Een versterkte balk in de vorm zoals getekend is een éénvoudig statisch onbepaalde constructie. Dit wordt als volgt duidelijk. Stel kracht S_{EF} in staaf EF heeft de grootte H (trek). Uit het evenwicht van de knooppunten E en F volgt dan dat de krachten S_{CE} en S_{DF} de grootte H (druk) hebben en de krachten S_{AE} en S_{BF} de grootte $H\sqrt{2}$ (trek).

De grootte van de genoemde krachten kan ook eenvoudig worden bepaald uit een poolfiguur. Het staafsysteem AEFB is immers niets anders dan de stangenveelhoek behorende bij de krachten S_{CE} en S_{DF}.
Hierbij moet worden opgemerkt dat alleen de <u>vorm</u> van de poolfiguur en de stangenveelhoek bekend is, de grootte van H is echter nog onbekend.

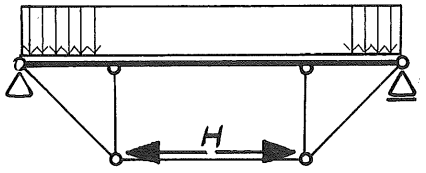
De belasting van de balk is dus, indien kracht $S_{EF} = H$, als aangegeven in de figuur. We hebben te maken met <u>vier</u> onbekende krachten: H_A, V_A, V_B en H.
We beschikken over slechts <u>drie</u> evenwichtsvergelijkingen:
$\Sigma H = 0$; $\Sigma V = 0$; $\Sigma M = 0$.



Voor het totale evenwicht doet de vorm van een constructie er niet toe.
Dit betekent dat de drie onbekende reactiekrachten H_A, V_A en V_B in de opleggingen van een versterkte balk direct kunnen worden bepaald uit de evenwichtsvoorwaarden. We kunnen zeggen dat de balk statisch bepaald is opgelegd of dat de balk uitwendig statisch bepaald is.

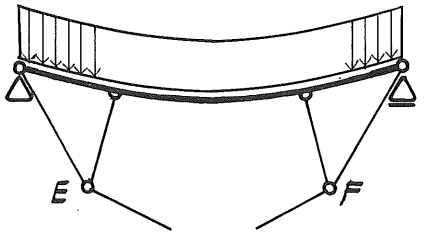


uitw. stat. bep.

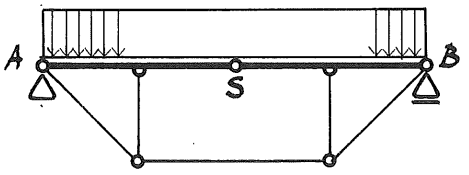


inw. stat. onbep.

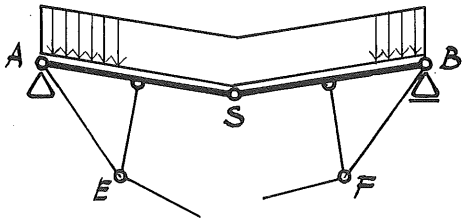
Na het bepalen van het uitwendig evenwicht blijft in een versterkte balk als enige onbekende kracht over de inwendige kracht H. We zeggen daarom dat een versterkte balk inwendig statisch onbepaald is.
Omdat er sprake is van slechts één onbekende kracht is de constructie éénvoudig statisch onbepaald.



Snijden we staaf EF eens middendoor - heffen we dus de werking van kracht H op - dan houden we dus een statisch bepaalde constructie over.

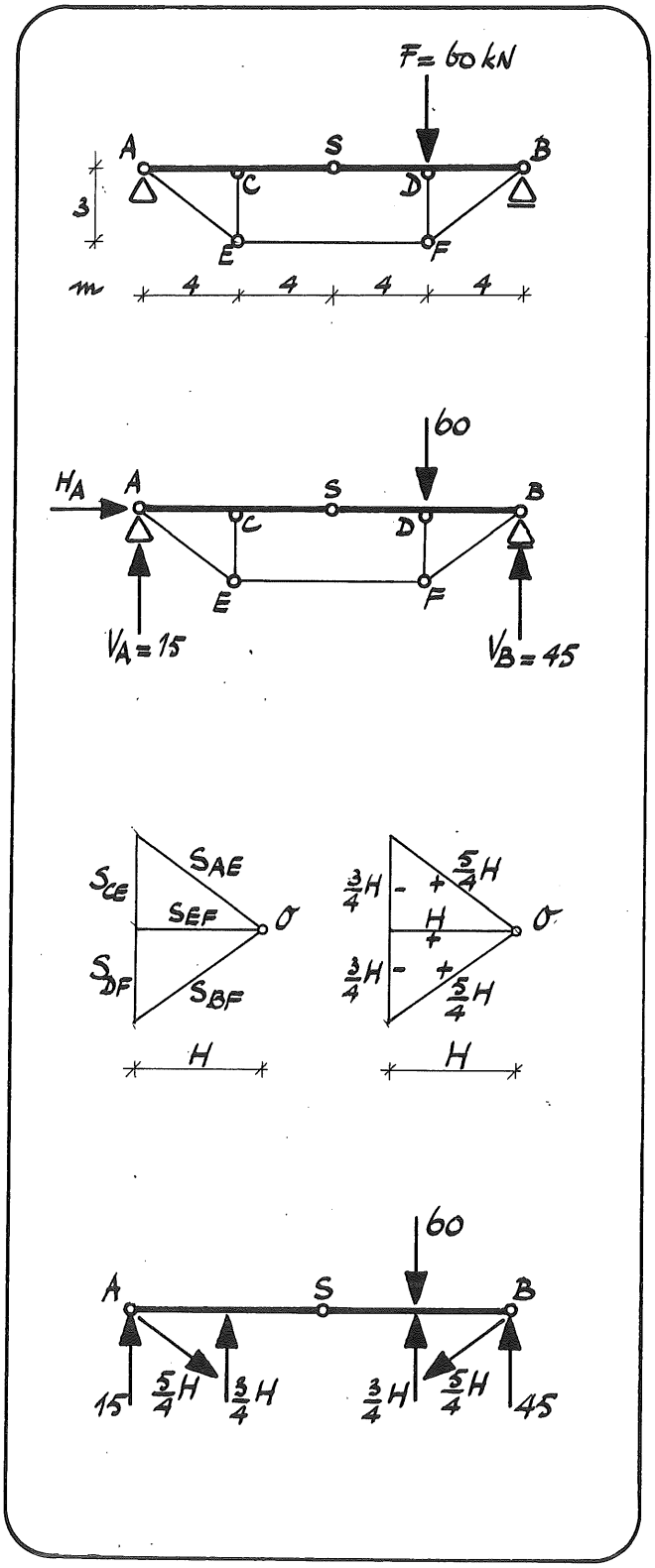


Brengen we in balk AB een scharnier S aan dan ontstaat een constructievorm van een versterkte balk die statisch bepaald is. Door het aanbrengen van het scharnier S ontstaat immers de voorwaarde $\Sigma M_S = 0$.



Snijden we nu staaf EF weer middendoor dan zal de constructie direct bezwijken.

We gaan ons bezighouden met versterkte balken met een scharnier S en zullen nagaan hoe de krachtsverdeling in zo'n balk kan worden bepaald. We kunnen daarbij gebruik maken van de analytische en de grafische methode.



Als voorbeeld bepalen we de krachtsverdeling in de gegeven balk die wordt belast door de kracht F = 60 kN.
We zullen deze krachtsverdeling eerst bepalen volgens de analytische methode.

We gaan het uitwendig evenwicht na en vinden dan:

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 0$

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_B - 60 = 0$

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot 16 - F \cdot 4 = 0$

$V_A \cdot 16 - 60 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_A = 15$ kN

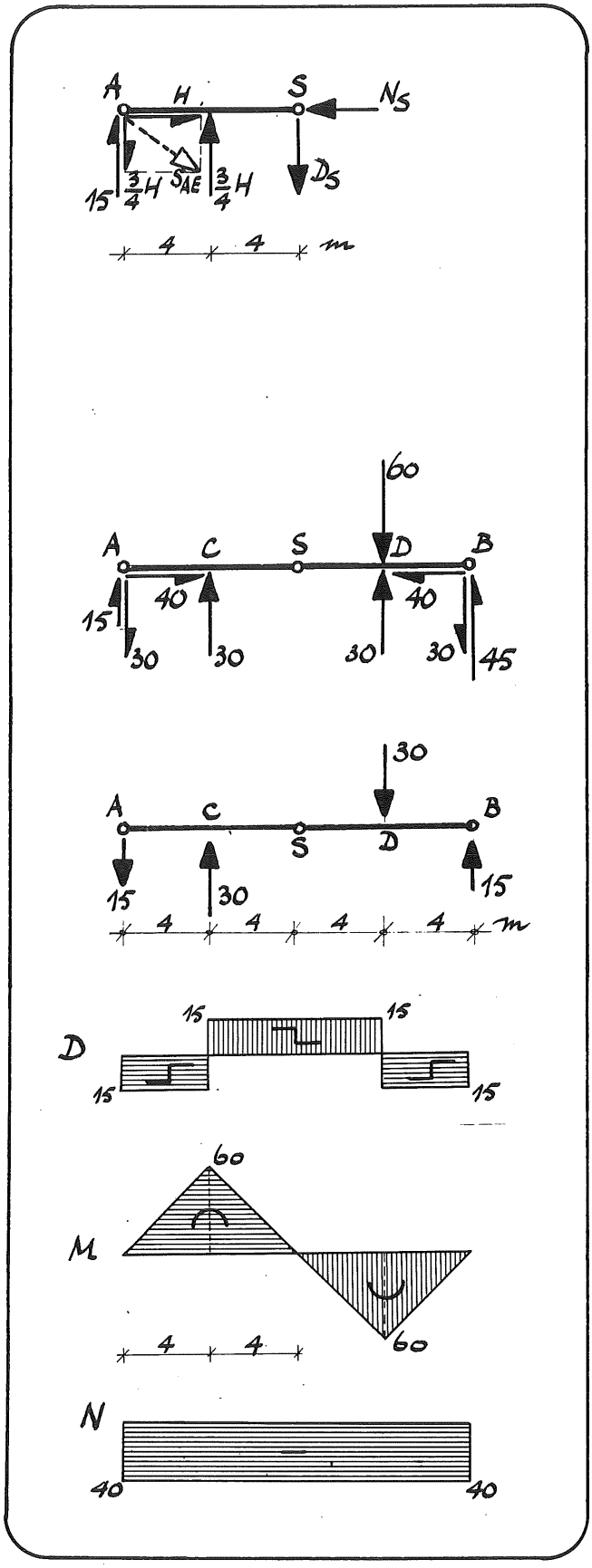
Dan is: $V_B = 60 - V_A = 45$ kN

Beschouwen we het staafsysteem AEFB als de stangenveelhoek tengevolge van de krachten S_{CE} en S_{DF} in de staven CE en DF dan kunnen we uit de bijbehorende poolfiguur de onderlinge verhoudingen van de grootte van de krachten in de staven afleiden.
Stellen we de kracht S_{EF} in staaf EF gelijk aan +H dan vinden we:

$S_{AE} = S_{BF} = + \frac{5}{4} H$ (trek)

$S_{CE} = S_{DF} = - \frac{3}{4} H$ (druk)

Alle krachten die op de balk ASB werken zijn bekend. Zodra we de grootte van H weten is ook de grootte van deze krachten bekend.



De grootte van H kan worden bepaald uit de voorwaarde $\Sigma M_S = 0$.
We beschouwen daartoe het evenwicht van balkdeel AS. In S werken een dwarskracht D_S en een normaal kracht N_S. Verder ontbinden we kracht S_{AE} in een horizontale component $H_{AE} = H$ en een verticale component $V_{AE} = \frac{3}{4}H$.
We vinden:

$$\Sigma H = 0 \rightarrow H - N_S = 0 \rightarrow N_S = H$$

$$\Sigma M_S = 0 \rightarrow 15 \,.\, 8 - \frac{3}{4} H \,.\, 8 + \frac{3}{4} H \,.\, 4 = 0$$

$$\rightarrow H = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow 15 - \frac{3}{4} H + \frac{3}{4} H - D_S = 0 \rightarrow D_S = 15 \text{ kN}$$

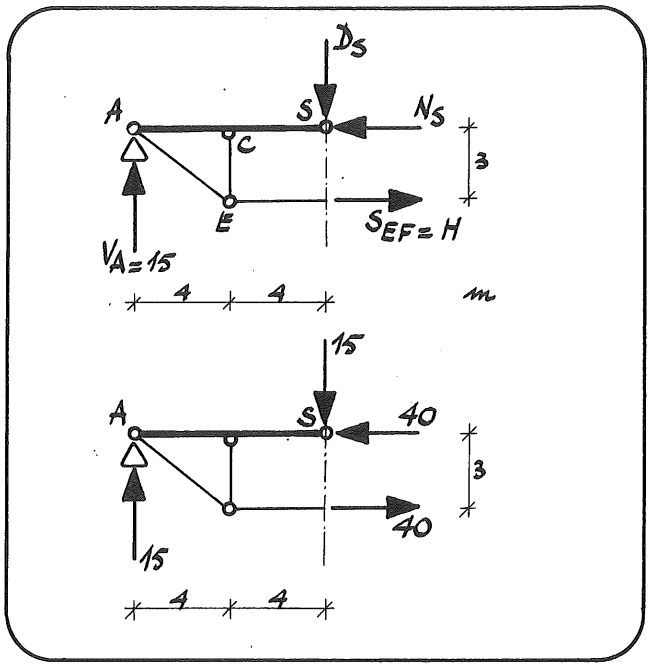
De grootte van alle krachten die op balk ASB werken is nu bekend. Met behulp van deze waarden kunnen we de M-, D- en N-lijn voor balk AB bepalen en tekenen.

Makkelijker wordt het als we eerst het belastingschema wat vereenvoudigen.
We vinden dan:

$D_{AC} = -15$ kN
$D_{CD} = -15 + 30 = 15$ kN
$D_{CB} = -15 + 30 - 30 = -15$ kN

$M_C = -15 \,.\, 4 = -60$ kNm
$M_S = -15 \,.\, 8 + 30 \,.\, 4 = 0$ (scharnier in S)
$M_D = -15 \,.\, 12 + 30 \,.\, 8 = 60$ kNm of
$M_D = 15 \,.\, 4 = 60$ kNm

We hadden de grootte van H sneller kunnen bepalen door een snede aan te brengen over het scharnier S en het evenwicht te beschouwen van het totale balkdeel links van deze snede.



Op dit deel werken:

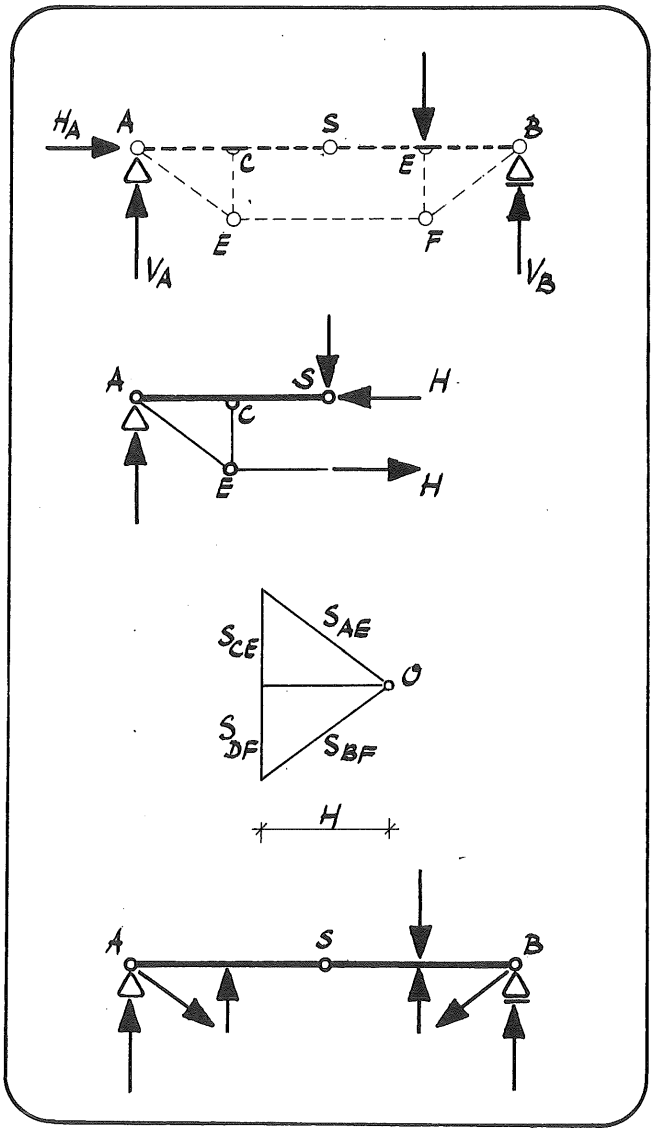
- de reactiekracht $V_A = 15$ kN
- de scharnierkrachten N_S en D_S in scharnier S
- de staafkracht $S_{EF} = H$ in staaf EF

We vinden:

$\Sigma V = 0 \rightarrow 15 - D_S = 0 \rightarrow D_S = 15$ kN

$\Sigma M_S = 0 \rightarrow 15 . 8 - H . 3 = 0 \rightarrow H = 40$ kN

$\Sigma H = 0 \rightarrow N_S - H = 0 \rightarrow N_S = 40$ kN



Samenvattend:

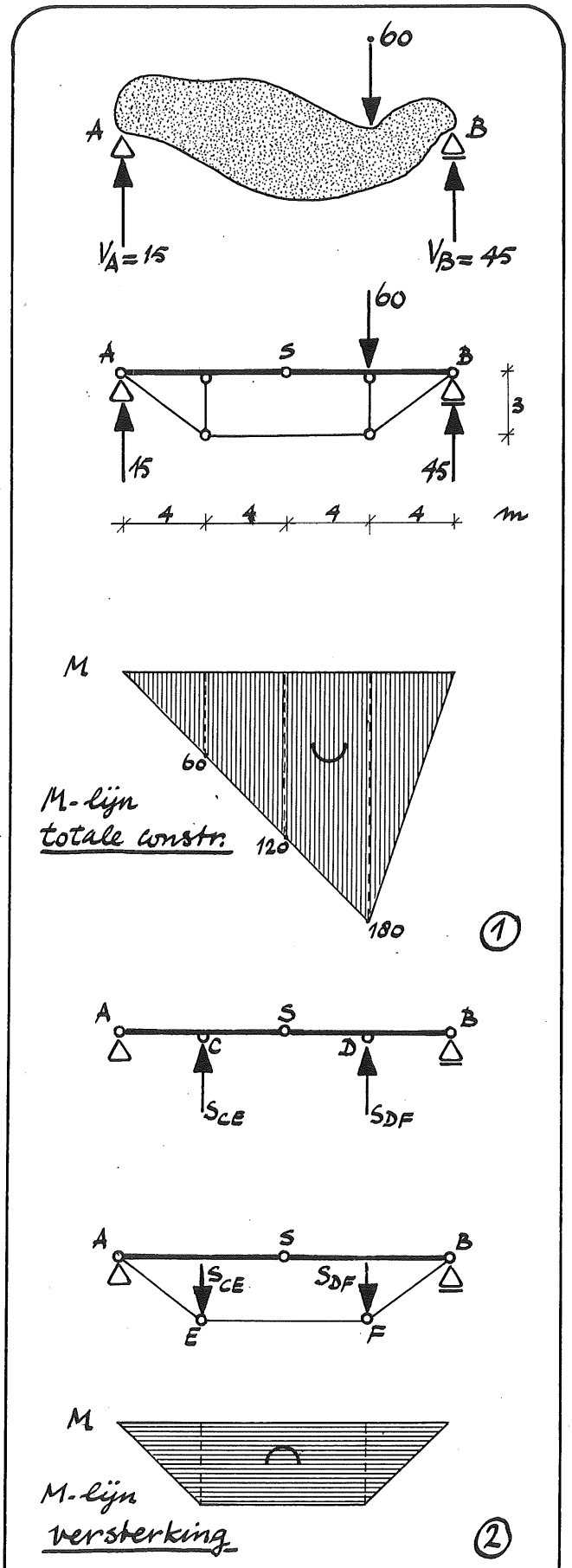
Voor het bepalen van de krachtsverdeling in een versterkte balk (analytische methode) gaan we dus als volgt te werk:

- bepaal de oplegreacties H_A, V_A en H_B uit het uitwendig evenwicht (deze zijn onafhankelijk van de vorm van de constructie)

- bepaal de grootte van kracht H uit het inwendig evenwicht (beschouw een doorsnede over het scharnier in S)

- bepaal de krachten in alle staven van het staafsysteem, b.v. door het tekenen van een poolfiguur met poolafstand H

- teken alle krachten die op balk AB werken en bepaal daarna de M-, D- en N-lijn voor de balk



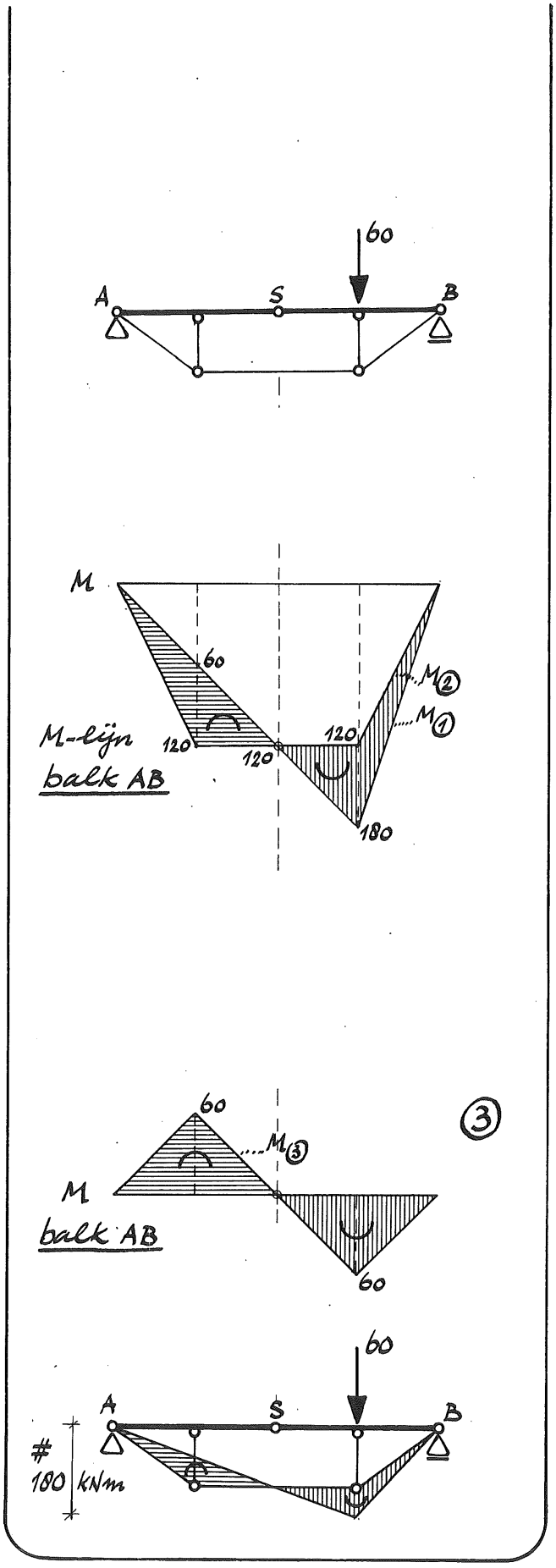
We gaan nu de krachtsverdeling eens bepalen volgens de grafische methode.

We hebben bij de analytische methode reeds gezien dat we de oplegreacties H_A, V_A en V_B in de ondersteuningen van de versterkte balk kunnen bepalen door balk ASB met het ondergehangen staafsysteem als één constructie te beschouwen. De grootte van deze oplegreacties is immers onafhankelijk van de vorm van de constructie.
We hebben gevonden:
$H_A = 0$; $V_A = 15$ kN; $V_B = 45$ kN.
volgens de analytische methode.
N.B. De oplegreacties kunnen ook volgens de grafische methode worden bepaald (zie hoofdstuk 13). Dit wordt in het algemeen niet gedaan.

Als de grootte van de oplegreacties bekend is kunnen we ook de momentenlijn voor de totale constructie bepalen met als
$M_{max} = 45 \cdot 4 = 180$ kNm (1)

We hebben ook reeds gezien dat balk ASB in C en D extra wordt ondersteund door het staafsysteem waarbij in de staven CE en DF de krachten S_{CE} en S_{DF} ontstaan.
Hierdoor ontstaan opbuigende momenten in balk ASB.

De krachten S_{CE} en S_{DF} worden via het staafsysteem AEFB afgeleid naar de steunpunten A en B, waarbij balk ASB als drukstaaf fungeert.
Het staafsysteem AEFB is te beschouwen als de stangenveelhoek behorende bij de krachten S_{CE} en S_{DF}.
Het staafsysteem AEFB met drukstaaf ASB is een gesloten stangenveelhoek. Deze komt overeen met de momentenlijn tengevolge van de krachten S_{CE} en S_{DF} (2)



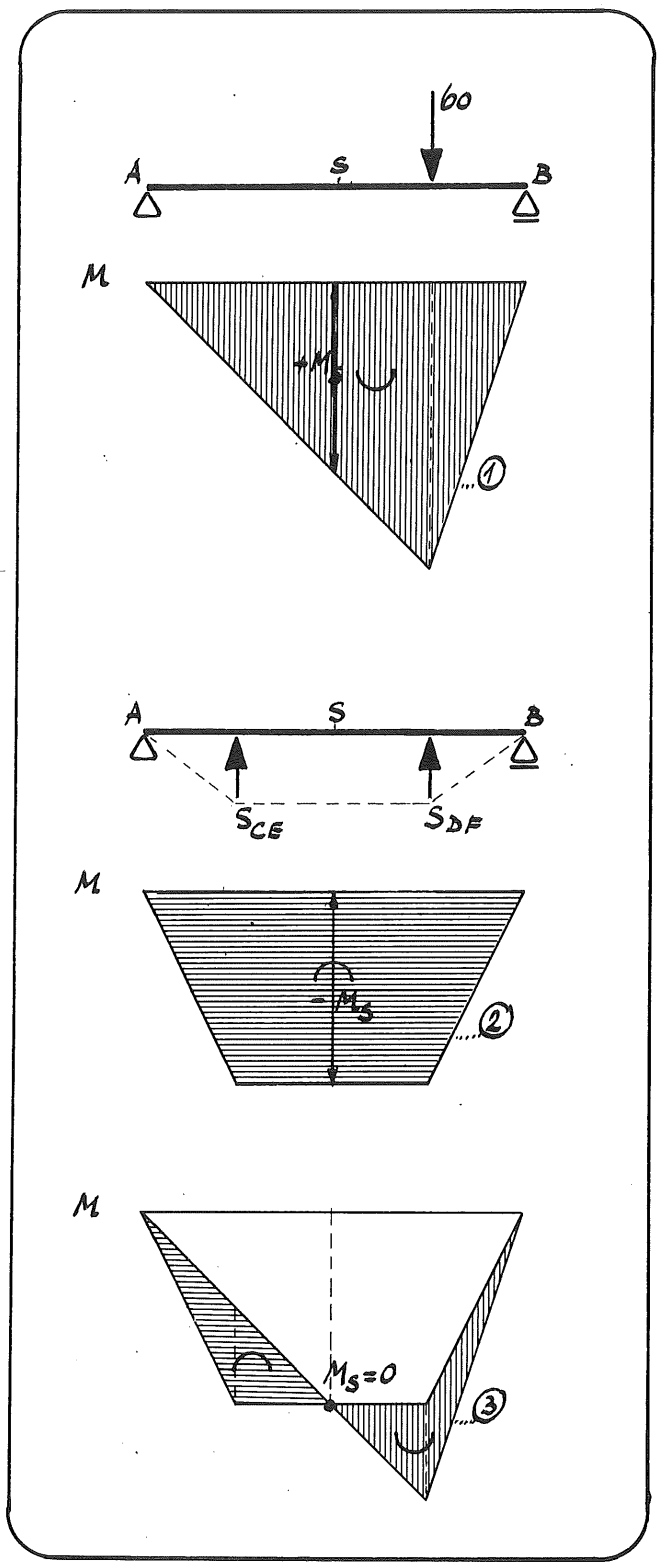
Momentenlijn (2) geeft dus de invloed op de balk weer van de belasting door de versterking (het systeem van staven).

We redeneren nu als volgt:
- momentenlijn (1) is de momentenlijn die geldt voor de totale constructie
- momentenlijn (2) is de momentenlijn tengevolge van de belasting door de versterking
- het verschil van de momentenlijnen (1) en (2) is momentenlijn (3); deze geldt voor balk ASB

Van momentenlijn (1) zijn alle momenten bekend, uitgezet op een bepaalde schaal. Van momentenlijn (2) is alleen de vorm bekend. Dit wil zeggen dat de momenten van deze lijn zijn uitgezet op een andere schaal dan die van de momenten van momentenlijn (1).
Maken we de schaal van momentenlijn (2) gelijk aan die van momentenlijn (1) dan zal het verschil van de momenten ter plaatse van het scharnier S gelijk moeten zijn aan nul. We kunnen dit eenvoudig doen door beide momentenvlakken over elkaar heen te tekenen en daarbij momentenlijn (2) zodanig te vervormen dat het moment in S nul wordt.
Het resterende momentenvlak is dan het vlak van momentenlijn (3) die geldt voor balk ASB.

We kunnen momentenlijn (3) nog wat eleganter tekenen door uit te gaan van een rechte nullijn.

Tekenen we <u>in</u> het schema van de versterkte balk (momentenlijn 2) de momentenlijn tengevolge van de belasting (momentenlijn 1) - momentenlijn 1 wordt dan vervormd - dan vinden we <u>snel</u> de <u>vorm</u> van momentenlijn (3). De extreme waarden van deze lijn volgen dan gemakkelijk uit de figuur.

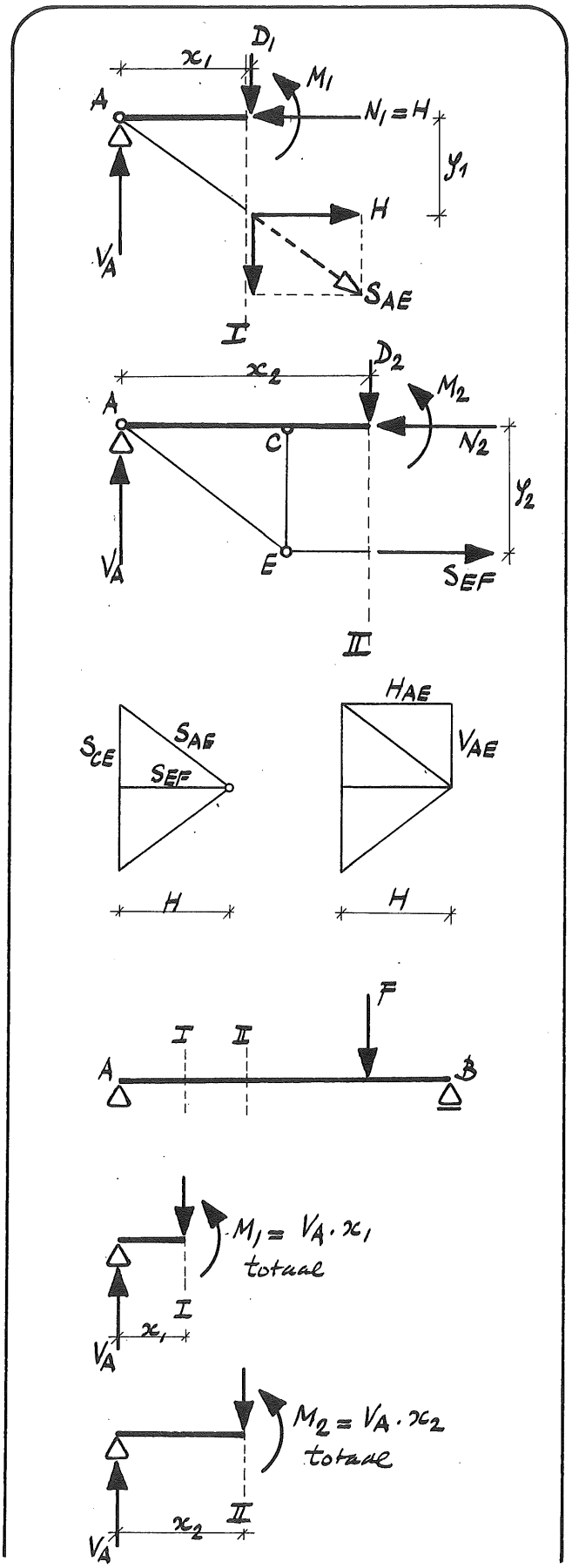


We hebben eigenlijk het volgende gedaan. Eerst hebben we balk AB beschouwd met zijn belasting, echter zonder de versterking en zonder scharnier S.
De momentenlijn is dan momentenlijn (1).

Daarna hebben we balk AB beschouwd met zijn belasting tengevolge van de versterking. Bepalen we de momentenlijn tengevolge van deze belasting volgens de grafische methode dan vinden we een gesloten stangenveelhoek die overeenkomt met het staafsysteem AEFB. De vorm van dit staafsysteem bepaalt dus momentenlijn (2).

Passen we vervolgens de momentenlijnen (1) en (2) op elkaar en vervormen we daarbij momentenlijn (2) zodanig dat het moment in S nul wordt dan hebben we momentenlijn (3) gevonden.

We gaan de juistheid van onze redenering aantonen.



We brengen een snede I aan op een afstand x_1 van A en een snede II op een afstand x_2. Snede I snijdt de schuine staaf AE en snede II snijdt de horizontale staaf EF.
Om de krachten die werken op het constructiedeel links van de snede goed te kunnen aangeven hebben we het schema voor dit deel op grotere schaal getekend.

In doorsnede I werken in balk ASB de inwendige krachten N_1, D_1 en M_1 en in staaf AE de kracht S_{AE}. In de poolfiguur is te zien dat de horizontale component H_{AE} van deze kracht is: $H_{AE} = H$.

Uit $\Sigma H = 0$ volgt dan dat $N_1 = H$.

Uit $\Sigma M = 0$ volgt:

$V_A \cdot x_1 - H \cdot y_1 - M_1 = 0$

of: $M_1 = V_A \cdot x_1 - H \cdot y_1$

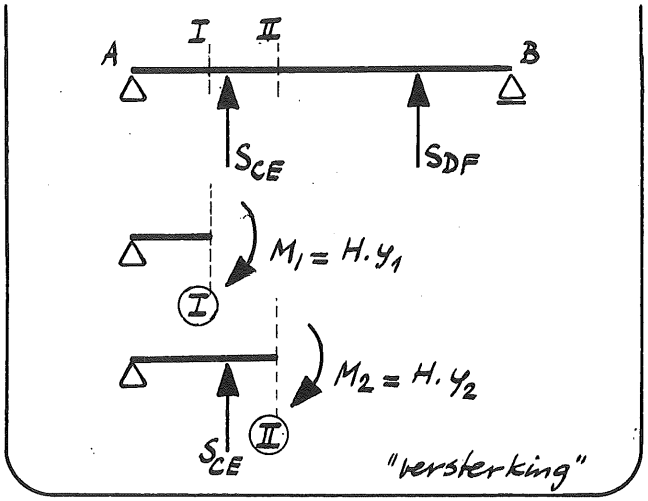
In doorsnede II werken in balk ASB de krachten N_2, D_2 en M_2 en in staaf EF kracht $S_{EF} = H$.

Uit $\Sigma H = 0$ volgt: $N_2 = H$

Uit $\Sigma M = 0$ volgt: $V_A \cdot x_2 - H \cdot y_2 - M_2 = 0$

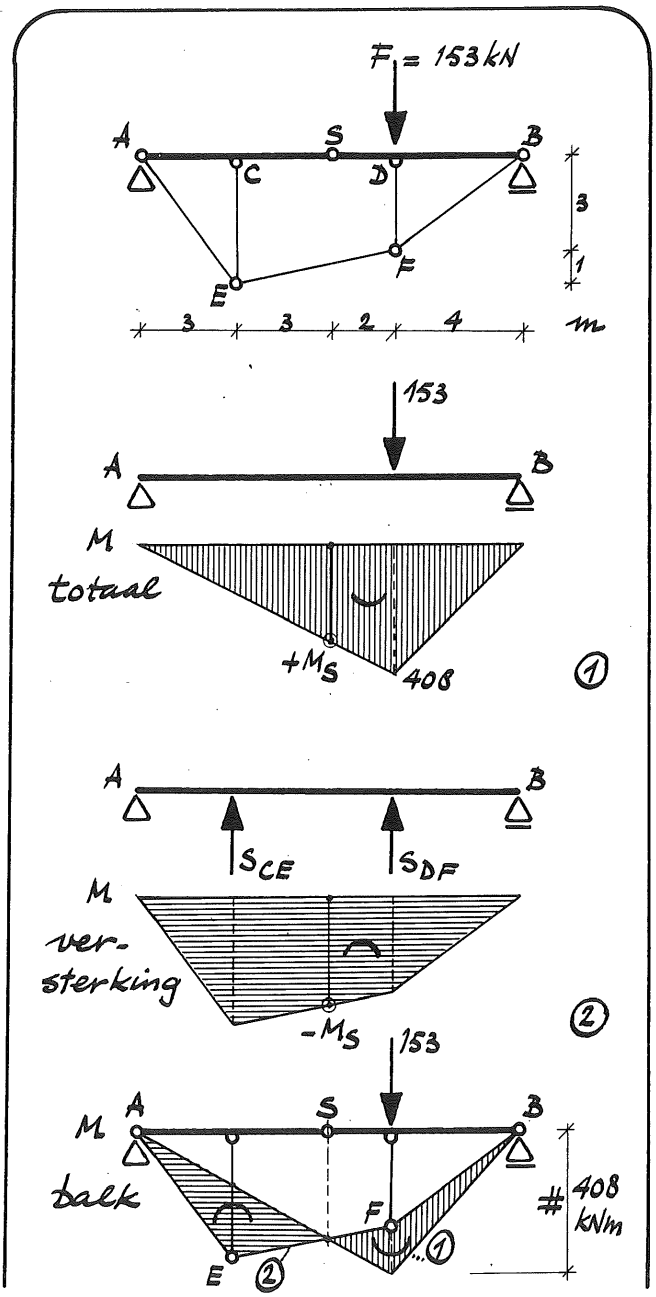
of: $M_2 = V_A \cdot x_2 - H \cdot y_2$

In de uitdrukkingen voor M_1 en M_2 stellen de termen $V_A \cdot x_1$ en $V_A \cdot x_2$ het uitwendig moment voor ten opzichte van de doorsneden I en II. Deze momenten zijn gelijk aan de momenten in de doorsneden I en II van een normale balk zonder scharnier. We noemen deze momenten M_{totaal}. Waarbij $M_{totaal} = V_A \cdot x$. Deze momenten worden weergegeven door momentenlijn (1) (zie blz. 11).



De termen $H.y_1$ en $H.y_2$ stellen de momenten voor die worden veroorzaakt door kracht H in de versterking van de balk. Deze momenten zijn gelijk aan de momenten in de doorsneden I en II van een normale balk zonder scharnier belast door de krachten S_{CE} en S_{DF}. We noemen deze momenten $M_{versterking}$. Waarbij $M_{versterking} = H.y$. Deze momenten worden weergegeven door momentenlijn (2) (zie blz. 11) die is afgeleid uit de vorm van het staafsysteem AEFB van de versterking.

Uit de formule $M = V_A.x-H.y$ volgt dat de momentenlijn van balk ASB (M_{balk}) wordt bepaald door het verschil van de momentenlijnen (1) en (2): $M_{balk} = M_{totaal} = M_{versterking}$
We zien dat m.b.v. de grafische methode de krachtsverdeling snel is te bepalen.



In dit tweede voorbeeld beginnen we met de grafische methode.
Van de gegeven balk die wordt belast door F = 153 kN willen we de M-, D- en N-lijn tengevolge van deze belasting weten.
We beschouwen balk AB zonder scharnier en zonder versterking en bepalen de oplegreacties:

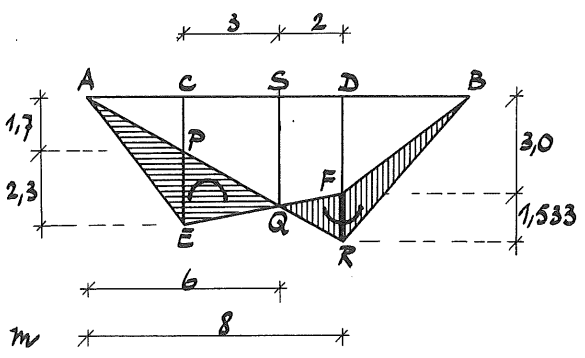
$V_A : V_B = 4 : 8$ $\qquad$ $V_A = 51$ kN
$V_A + V_B = 153$ kN $\qquad$ $V_B = 102$ kN

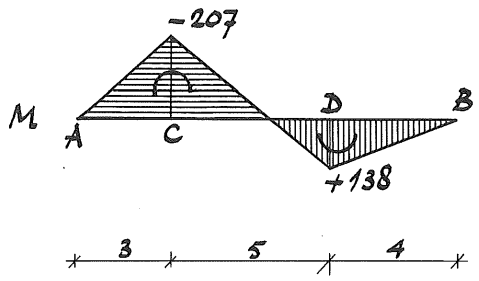
We bepalen ook de momentenlijn voor balk AB. Deze komt overeen met de momentenlijn voor de totale constructie (M_{totaal}). We vinden:

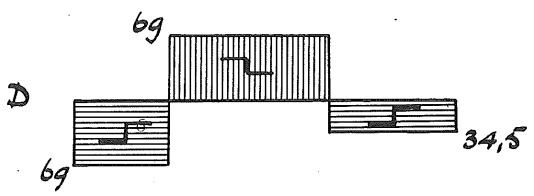
$M_{max} = 51 . 8 = 408$ kNm (1)

De vorm van de momentenlijn tengevolge van de belasting door de versterking (de krachten S_{CE} en S_{DF}) volgt direct uit de vorm van deze versterking ($M_{versterking}$) (2)

Bepalen we het verschil van de momentenlijnen (1) en (2) dan hebben we de momentenlijn voor de balk ASB gevonden.
We kunnen dit doen door in het schema van de versterkte balk de vorm van momentenlijn (1) te tekenen en er daarbij voor te zorgen dat het moment ter plaatse van S gelijk wordt aan nul.







Uit de figuur volgt:

SQ = 3,4 m

DR = $\frac{8}{6}$. 3,4 = 4,533 m

De lengte van DR komt overeen met een moment M = 408 kNm.

Verder is:

FR = DR - DF = 4,533 - 3,0 = 1,533 m.

De lengte FR komt overeen met een moment

$M_D = \frac{1,533}{4,533} \cdot 408 = 138$ kNm.

EP = $\frac{3}{2}$. FR = 2,3 m

Dan is: $M_C = \frac{3}{2} \cdot M_D = \frac{3}{2} \cdot 138 = 207$ kNm.

Alle extreme waarden van de momentenlijn voor balk ASB zijn hiermede bekend. Tekenen we deze lijn met een rechte nullijn dan vinden we het getekende diagram.

De dwarskrachtenlijn voor balk ASB kunnen we bepalen door uit te gaan van het gegeven:

$$D_x = \frac{dM_x}{dx}$$

Dit betekent dat de helling van de momentenlijn gelijk is aan de grootte van de dwarskracht.

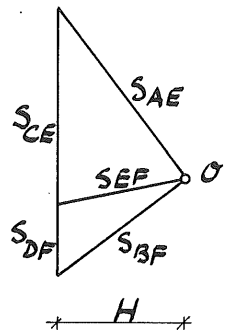
Deze grootte is:

tussen A en C: $D_{AC} = -\frac{207}{3} = -69$ kN

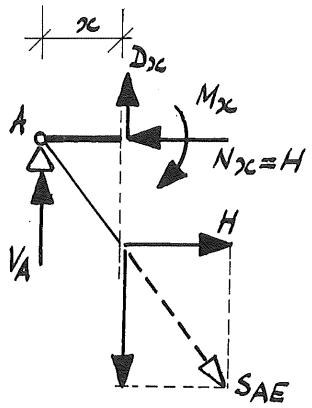
tussen C en D: $D_{CD} = +\frac{138 + 207}{5} = +69$ kN

tussen D en B: $D_{DB} = -\frac{138}{4} = -34,5$ kN

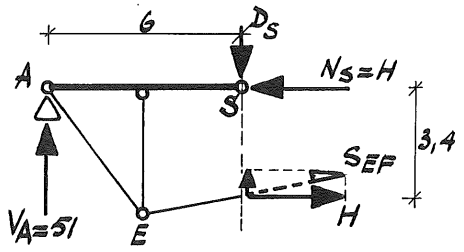
Met behulp van deze waarden kunnen we de dwarskrachtenlijn voor balk ASB tekenen.



Tekenen we de poolfiguur die behoort bij de stangenveelhoek AEFB dan zien we direct dat de horizontale component van de krachten S_{AE}, S_{EF} en S_{BF} gelijk is aan H.

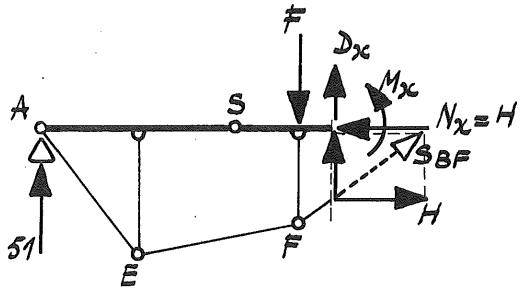


Dit betekent dat de normaalkracht N_x in een willekeurige doorsnede van balk AB is $N_x = H$.

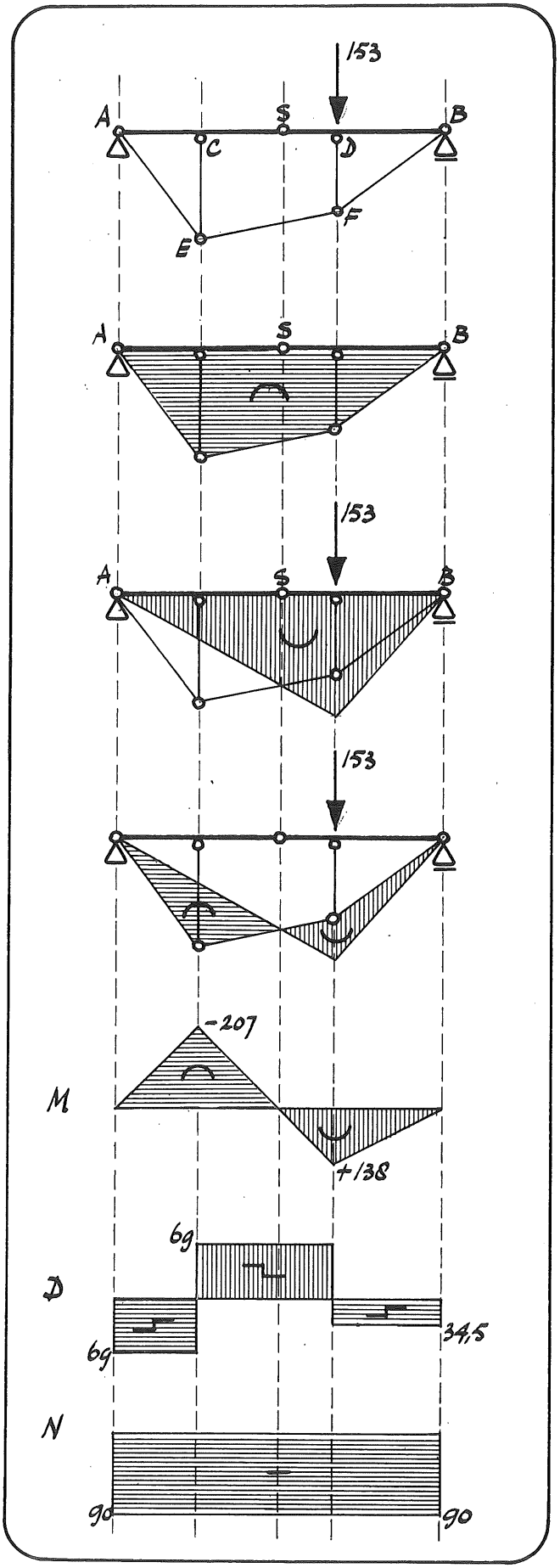


Beschouwen we de doorsnede over het scharnier S dan volgt uit $\Sigma M_S = 0$:

$$V_A \cdot 6 = H \cdot 3{,}4 \rightarrow H = \frac{51 \cdot 6}{3{,}4} = 90 \text{ kN}$$



Met behulp van deze waarde kunnen we de normaalkrachtenlijn voor balk ASB tekenen.



In de figuren is het totale resultaat nog eens samengevat.

Schema versterkte balk.

Momentenlijn tengevolge van de versterking, getekend in het schema.

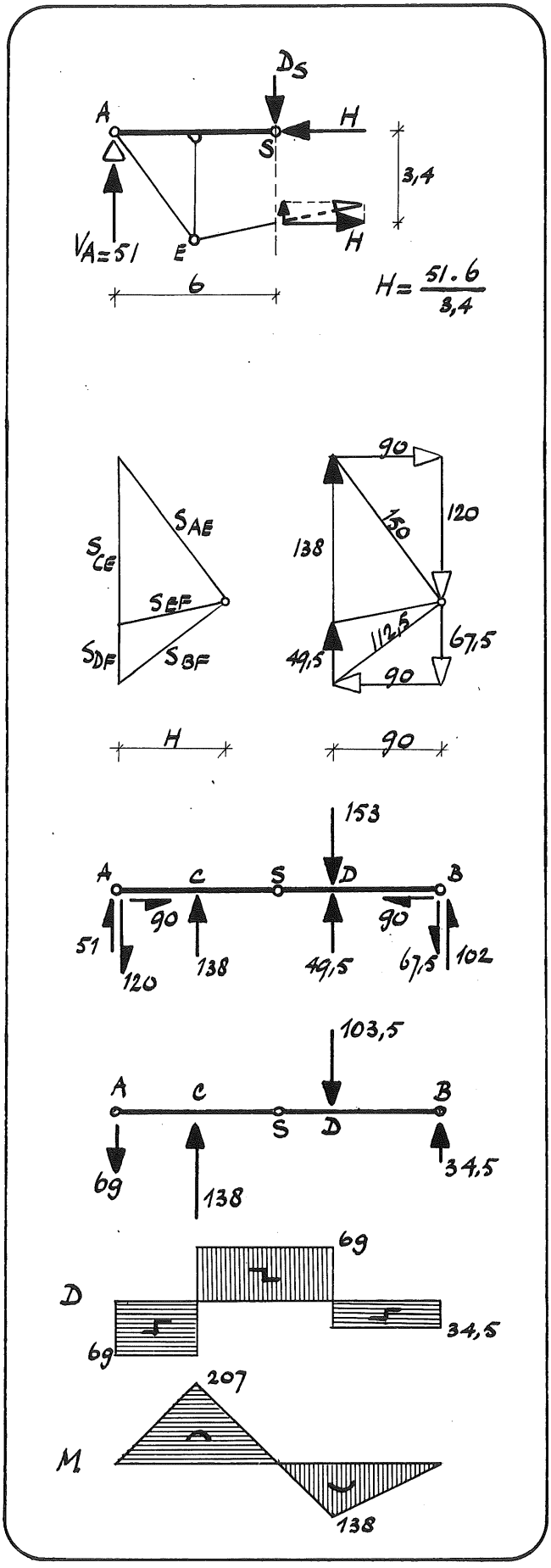
Momentenlijn tengevolge van F = 153 kN van de totale constructie, getekend in het schema van de versterkte balk.

Momentenlijn voor balk ASB, getekend in het schema.

Momentenlijn voor balk ASB, getekend op een rechte nullijn.

Dwarskrachtenlijn voor balk ASB, afgeleid uit de momentenlijn door gebruik te maken van $D_x = \frac{dMx}{dx}$

Normaalkrachtenlijn voor balk ASB.



We bepalen nu nog de krachtsverdeling volgens de analytische methode.

We berekenen eerst weer de oplegreacties H_A, V_A en V_B. Deze zijn:
$H_A = 0$; $V_A = 51$ kN; $V_A = 102$ kN.

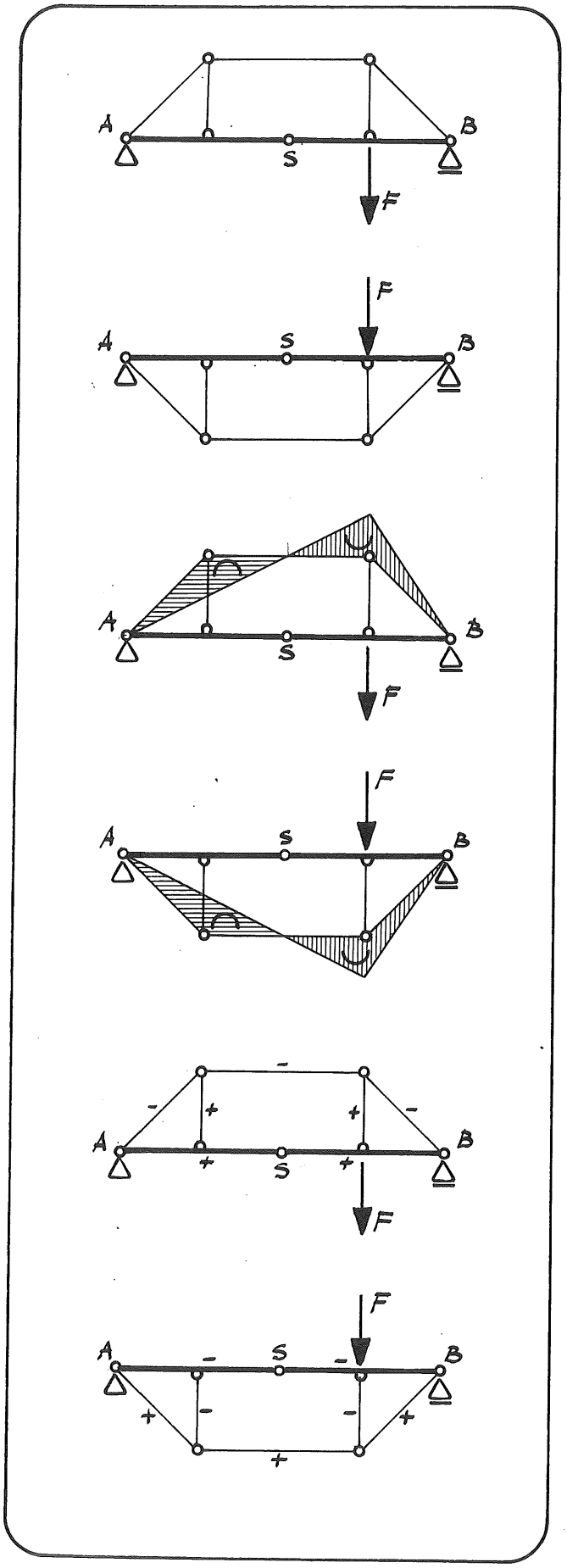
Daarna bepalen we de grootte van kracht H uit het inwendig evenwicht door een doorsnede over het scharnier S aan te brengen en het evenwicht te beschouwen van het constructiedeel links van deze doorsnede.
We vinden: H = 90 kN.

Vervolgens tekenen we de poolfiguur behorende bij de stangenveelhoek AEFB en bepalen de grootte van alle staafkrachten.
We kunnen daarbij volstaan met het bepalen van de horizontale en verticale componenten van deze staafkrachten.

We hebben nu alle gegevens om het belastingschema van balk AB te kunnen tekenen.
Met behulp van dit schema worden de M-, D- en N-lijn voor balk AB bepaald.
We vinden:

$D_{AC} = -69$ kN
$D_{CD} = -69 + 138 = +69$ kN
$D_{DB} = -34{,}5$ kN

$M_C = -69 \cdot 3 = -207$ kNm
$M_D = 34{,}5 \cdot 4 = 138$ kNm

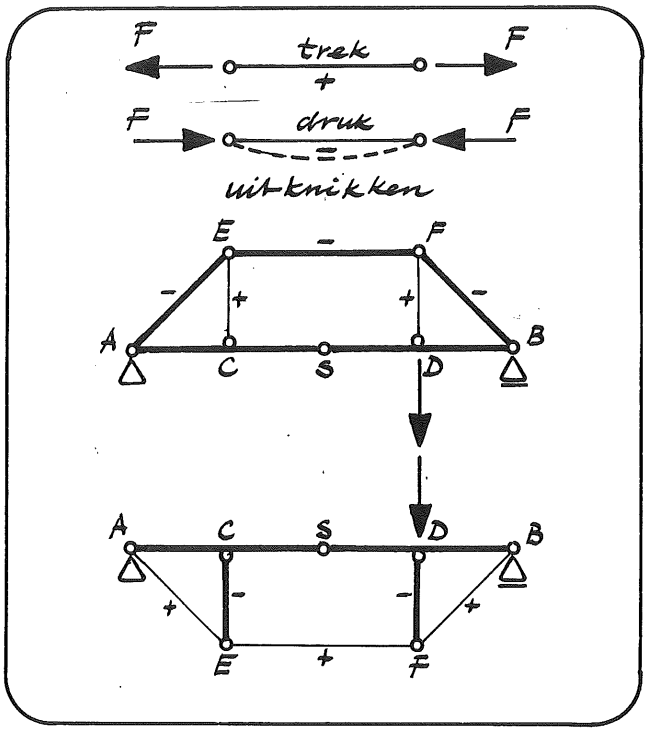


2. ANDERE CONSTRUCTIES

Indien we het staafsysteem voor de versterking van balk ASB aan de bovenzijde van de balk aanbrengen dan hebben we een constructie gekregen die het omgekeerde is van die uit het voorgaande.

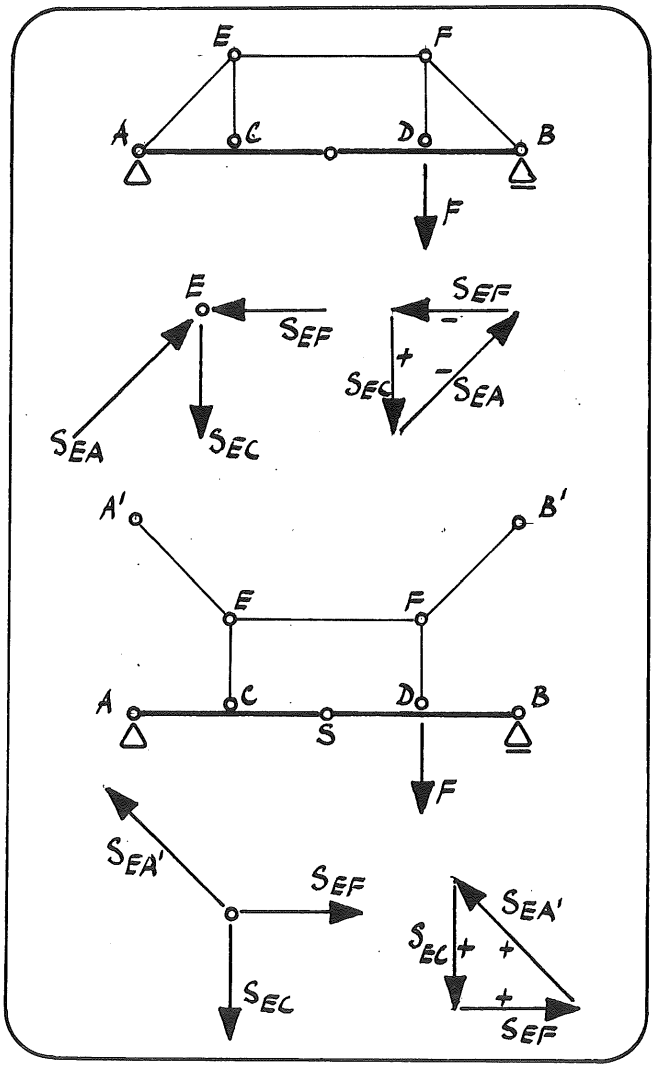
Het maakt voor de balk geen verschil of het staafsysteem aan de boven- dan wel aan de onderzijde wordt aangebracht. In beide gevallen vinden we voor balk AB dezelfde momentenlijn zoals uit de figuren wel duidelijk wordt.
Omdat de dwarskrachtenlijn uit de momentenlijn kan worden afgeleid vinden we voor beide gevallen ook dezelfde dwarskrachtenlijn.

Het enige verschil tussen beide constructievormen is het verschil in teken van de krachten in de staven van de versterking. Dit heeft tot gevolg dat ook de normaalkracht in balk AB van teken verandert. Er ontstaat in balk AB dus een trekkracht.



In hoofdstuk 11 hebben we reeds gezien dat we bij drukstaven rekening moeten houden met het gevaar voor uitknikken. Om dit gevaar te verminderen laten we geen hoge spanningen toe in drukstaven. Dit heeft tot gevolg een grotere doorsnede voor deze staven en dus een groter materiaalverbruik.

Willen we een balk versterken dan brengen we daarom bij voorkeur een versterking onder de balk aan. In dat geval zijn immers alleen de korte staven CE en DF drukstaven.



Uit de genoemde constructievormen van versterkte balken zijn <u>andere constructies</u> af te leiden. We gaan ons daarom bezighouden met:

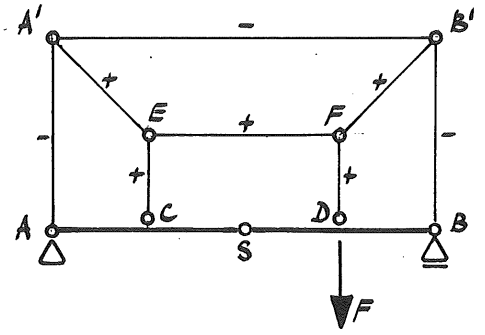
a. hangwerken
b. springwerken

a. <u>Hangwerken</u>

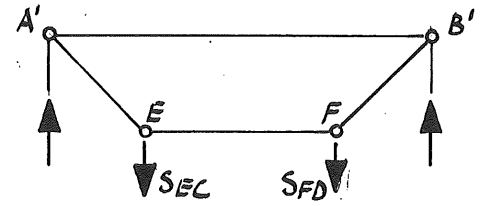
We beschouwen nog eens balk ASB met de versterking aan de bovenzijde en gaan het evenwicht na van knooppunt E. We zetten daarvoor de staafkrachten S_{EA}, S_{EF} en S_{EC} in een krachtendriehoek. De staven EA en EF zijn drukstaven. Staaf EC is een trekstaaf.

Verbinden we knooppunt E eens met een punt A' in plaats van met A, dan zien we uit de krachtendriehoek dat de staven EA', EF en EC alle <u>trek</u>staven zijn geworden.
Hetzelfde geldt voor de staven FB' en FD als we knooppunt B' aanbrengen.

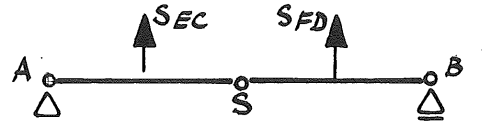
Dit lijkt erg gunstig. We moeten echter wel bedenken dat op de knooppunten A' en B' een kracht $S_{EA'}$ resp. $S_{FB'}$ wordt uitgeoefend. Deze krachten moeten naar de fundering (de steunpunten A en B) worden afgeleid.

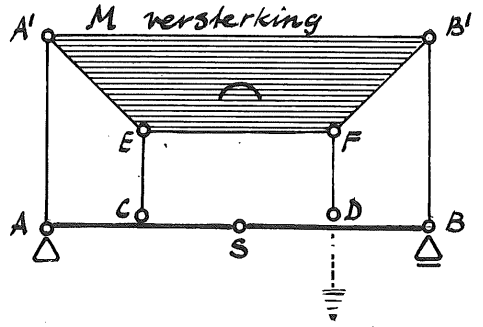


Dit kunnen we doen door de drukstaven AA', BB' en A'B' aan te brengen. We krijgen zodoende een tamelijk ongebruikelijke constructievorm voor een versterkte balk. (Deze vorm komt ons echter goed te pas voor de behandeling van vergelijkbare, bekende constructies).

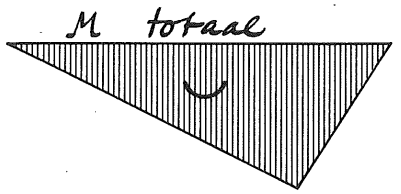


In deze constructie worden de staafkrachten S_{EC} en S_{FD} opgenomen door het gesloten staafsysteem A'EFB'.

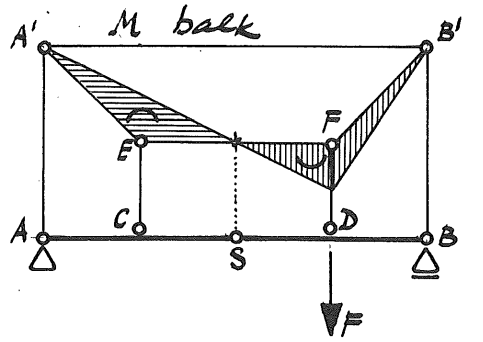




Dit betekent dat de momentenlijn voor balk ASB tengevolge van de krachten S_{EC} en S_{FD} wordt bepaald door de gesloten stangenveelhoek A'EFB'.

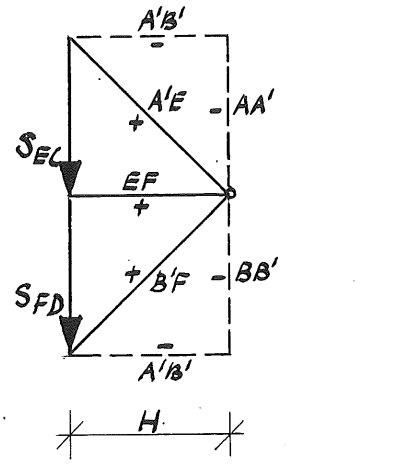


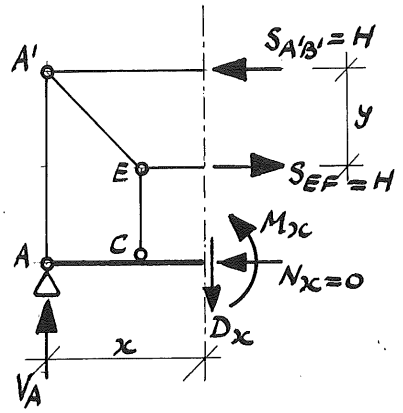
De momentenlijn tengevolge van kracht F voor de totale constructie is eenvoudig te bepalen. Deze is gelijk aan de momentenlijn voor balk AB, zonder scharnier en zonder versterking.

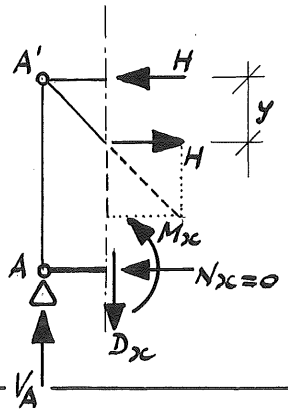


Tekenen we deze momentenlijn in het schema van de constructie en zorgen we er voor dat ter plaatse van S het moment nul wordt, dan vinden we gemakkelijk de momentenlijn voor balk ASB, omdat weer geldt:

$M_{balk} = M_{totaal} - M_{versterking}$







Om dit aan te tonen tekenen we de poolfifuur behorende bij de stangenveelhoek A'EFB'. Door in deze figuur ook de horizontale en verticale component van de staafkrachten $S_{A'E}$ en $S_{B'F}$ te tekenen zien we direct dat:

$$S_{EF} = - S_{A'B'} = H$$

We brengen nu een snede aan op een afstand x van A en beschouwen het evenwicht van het constructiedeel links van deze snede.

We vinden:

$\Sigma H = 0 \rightarrow N_x = 0$

In balk ASB werkt dus geen normaalkracht meer.

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A - D_x = 0 \rightarrow D_x = V_A$

$\Sigma M = 0 \rightarrow V_A \cdot x - H \cdot y - M_x = 0$

of $M_x = V_A \cdot x - H \cdot y$

De term $V_A \cdot x$ is niets anders dan het moment van de uitwendige krachten ten opzichte van de aangebrachte snede. Dit moment is onafhankelijk van de vorm van de constructie.

Dus: $V_A \cdot x = M_{totaal}$.

De term $H \cdot y$ is niet anders dan het moment tengevolge van de krachten S_{EC} en S_{FD} op balk ASB.

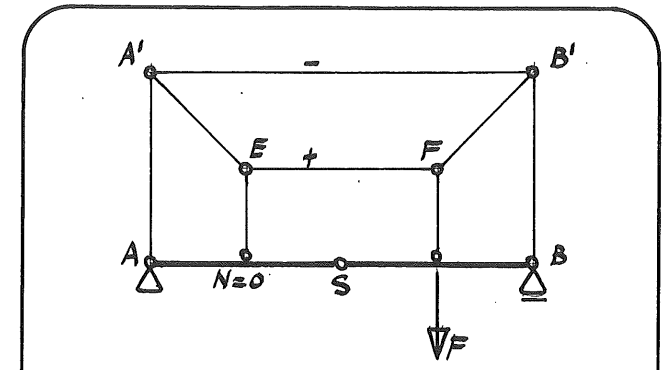
Dus: $H \cdot y = M_{versterking}$

Verder is: $M_x = M_{balk}$

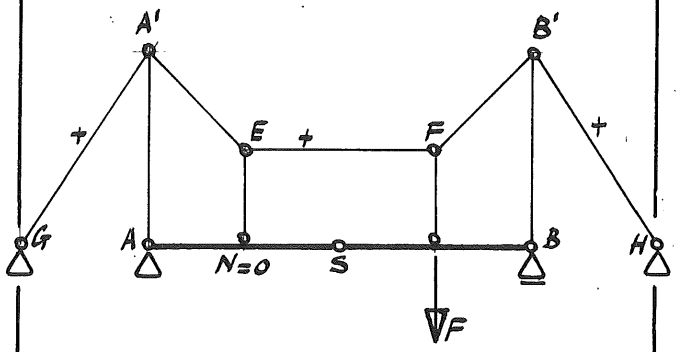
We zien dus dat:

$M_{balk} = M_{totaal} - M_{versterking}$

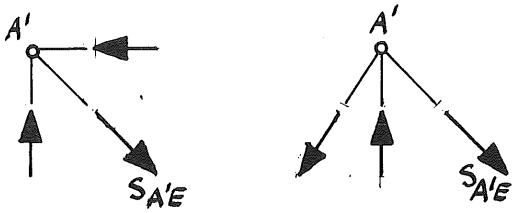
Dit geldt ook indien we een snede aanbrengen tussen A en C. De horizontale component van de staafkracht $S_{A'E}$ is immers gelijk aan H.



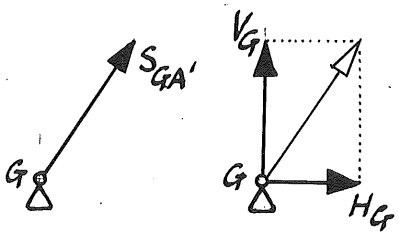
We hebben in het voorgaande de krachten $S_{A'E}$ en $S_{B'F}$ op de knooppunten A' en B' naar de fundering afgeleid door het aanbrengen van de drukstaven AA', BB' en A'B'.



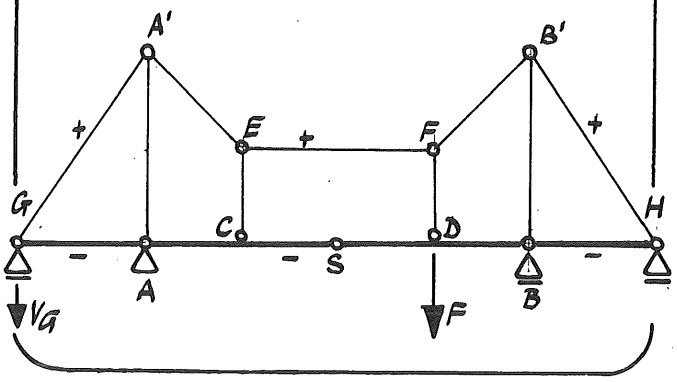
In plaats van de drukstaaf A'B' brengen we nu de trekstaven A'G en B'H aan.
Er ontstaat zodoende een constructie met vier steunpunten; G, A, B en H. We spreken daarom niet meer van een versterkte balk, maar van een <u>hangwerk</u> of hangconstructie.

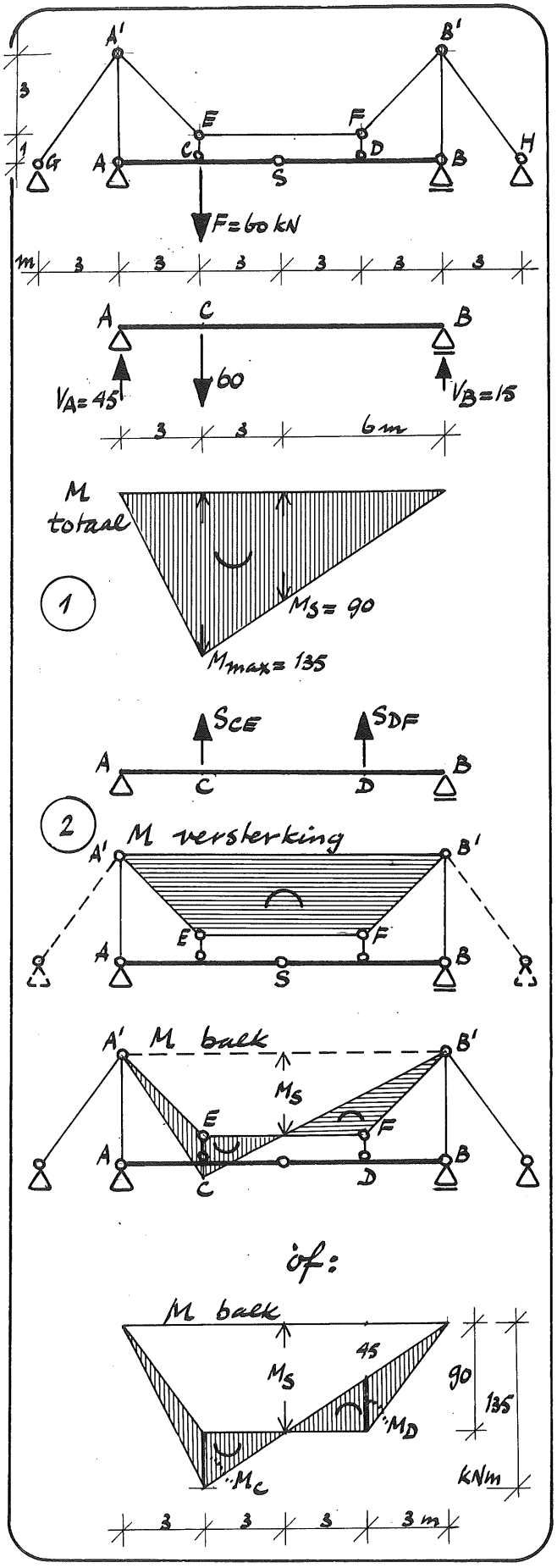


Het <u>enige</u> verschil tussen beide constructies is de wijze waarop de staafkrachten $S_{A'E}$ en $S_{B'F}$ worden afgeleid naar de fundering.
Dit betekent dat de momentenlijn voor balk ASB dezelfde is gebleven.



<u>Opmerking</u>
In de steunpunten G en H werkt een schuin omhoog gerichte kracht. Ontbinden we deze kracht in een horizontale en verticale component dan blijkt dat door de grond een horizontale reactiekracht geleverd moet kunnen worden. Dit is dikwijls zeer moeilijk. In dat geval is het veel economischer deze reactiekracht door de constructie zelf te laten leveren, b.v. door het aanbrengen van de staven GA en HB. De horizontale reacties in G en H worden dan door de balk GASBH opgenomen. De steunpunten G en H moeten nu nog alleen verticaal omhoog gerichte krachten weerstaan.
Dit kan het best geschieden door in G en H een ballast aan te brengen.





Als voorbeeld bepalen we eens de krachtsverdeling in het gegeven hangwerk dat wordt belast door de kracht F = 60 kN.

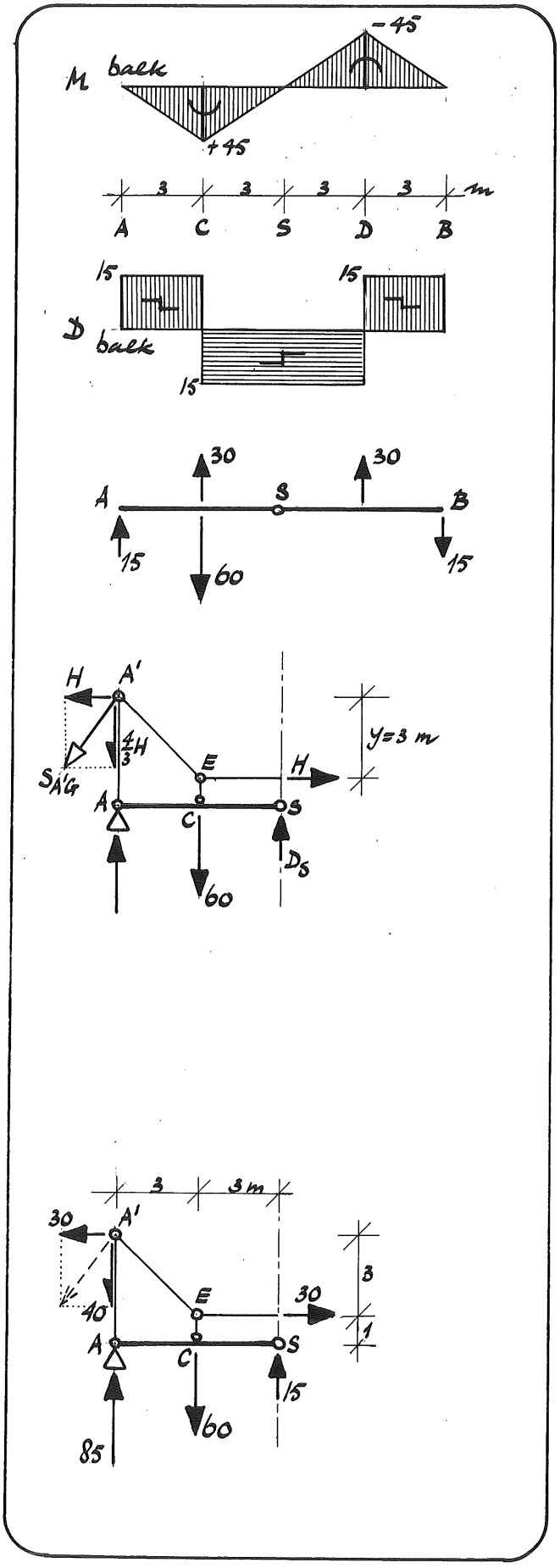
We beschouwen eerst balk AB met zijn belasting, maar zonder scharnier S en zonder het hangwerk en bepalen de oplegreacties V_A en V_B en de momentenlijn (1). Deze momentenlijn komt weer overeen met de momentenlijn voor de totale constructie.
We vinden:
V_A = 45 kN; V_B = 15 kN; M_{max} = 135 kNm.

Daarna beschouwen we balk AB met de belasting tengevolge van de krachten S_{CE} en S_{DF} in de staven CE en DF.
De momentenlijn (2) tengevolge van deze krachten wordt bepaald door de gesloten stangenveelhoek A'EFB'.

Vervolgens passen we de momentenlijnen (1) en (2) op elkaar. Doen we dit in het schema van het hangwerk dan moeten we momentenlijn (1) zodanig vervormen dat het moment in S gelijk wordt aan nul.

Doen we dit los van het schema van het hangwerk dan moeten we momentenlijn (2) vervormen en wel zodanig dat het moment in S weer nul wordt.

In beide gevallen is de momentenlijn voor balk ASB het verschil van de momentenlijnen (1) en (2).



Uit de figuren is af te leiden:

$M_C = +\ 45$ kNm

$M_D = -\ 45$ kNm

Tekenen we de M-lijn op een horizontale nullijn dan bepalen we daaruit gemakkelijk het verloop van de D-lijn. Want:

$$D_{AC} = \frac{M_C}{3} = \frac{45}{3} = 15 \text{ kN}$$

$$D_{CD} = -\ \frac{45 + 45}{6} = -\ 15 \text{ kN}$$

$$D_{DB} = \frac{45}{3} = 15 \text{ kN}$$

Uit de dwarskrachtenlijn volgt de belasting van de balk.

Voor balk ASB geldt verder:

$N_x = 0$

We brengen nog een snede aan over scharnier S en beschouwen het evenwicht van het constructiedeel links van de snede. Op dit deel werkt in knooppunt A' kracht $S_{A'G}$.

Uit $\Sigma H = 0$ volgt dat de horizontale component van $S_{A'G}$ gelijk moet zijn aan kracht H in staaf EF. De verticale component is dan $\frac{4}{3}$ H.

Uit momentenlijn (1) volgt dat voor de totale constructie geldt:

$M_S = 90$ kNm.

Dit moment wordt opgenomen door de krachten H, zodat:

$H \cdot y = H \cdot 3 = 90 \rightarrow H = 30$ kN

We hebben voor de oplegreactie in A gevonden $V_A = 45$ kN. Door de verticale component van de "reactiekracht" $S_{A'G}$ van het hangwerk wordt deze oplegreactie vergroot met de waarde $\frac{4}{3} \cdot H = \frac{4}{3} \cdot 30 = 40$ kN.

Dus $V_A = 45 + 40 = 85$ kN.

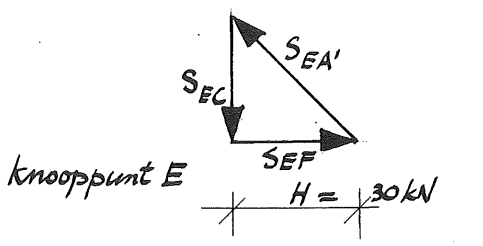
Evenzo: $V_B = 15 + 40 = 55$ kN

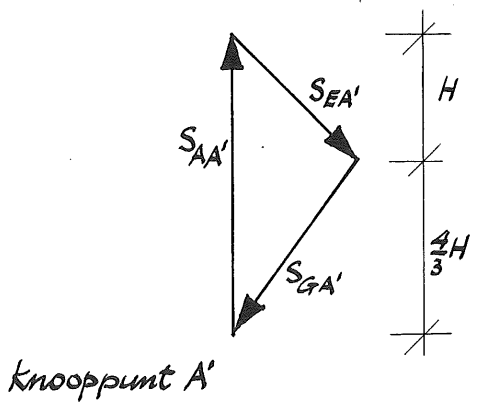
Uit $\Sigma V = o$ volgt nog: $D_S = 15$ kN.

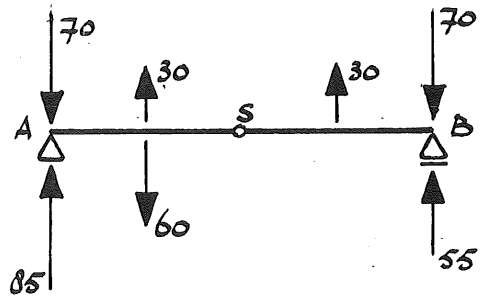
Controle voor $\Sigma M_S = 0$:

$85 \cdot 6 - 40 \cdot 6 - 60 \cdot 3 - 30 \cdot 4 + 30 \cdot 1 = 0$

(klopt)







Bepalen we het evenwicht van de knooppunten A' en E met behulp van een krachtendriehoek dan vinden we voor de krachten in de staven van het hangwerk:

$S_{EF} = H = 30$ kN

$S_{EC} = H = 30$ kN

$S_{EA'} = H\sqrt{2} = 42$ kN

$S_{GA'} = \frac{5}{3} H = 50$ kN

$S_{AA'} = -\frac{7}{3} H = -70$ kN

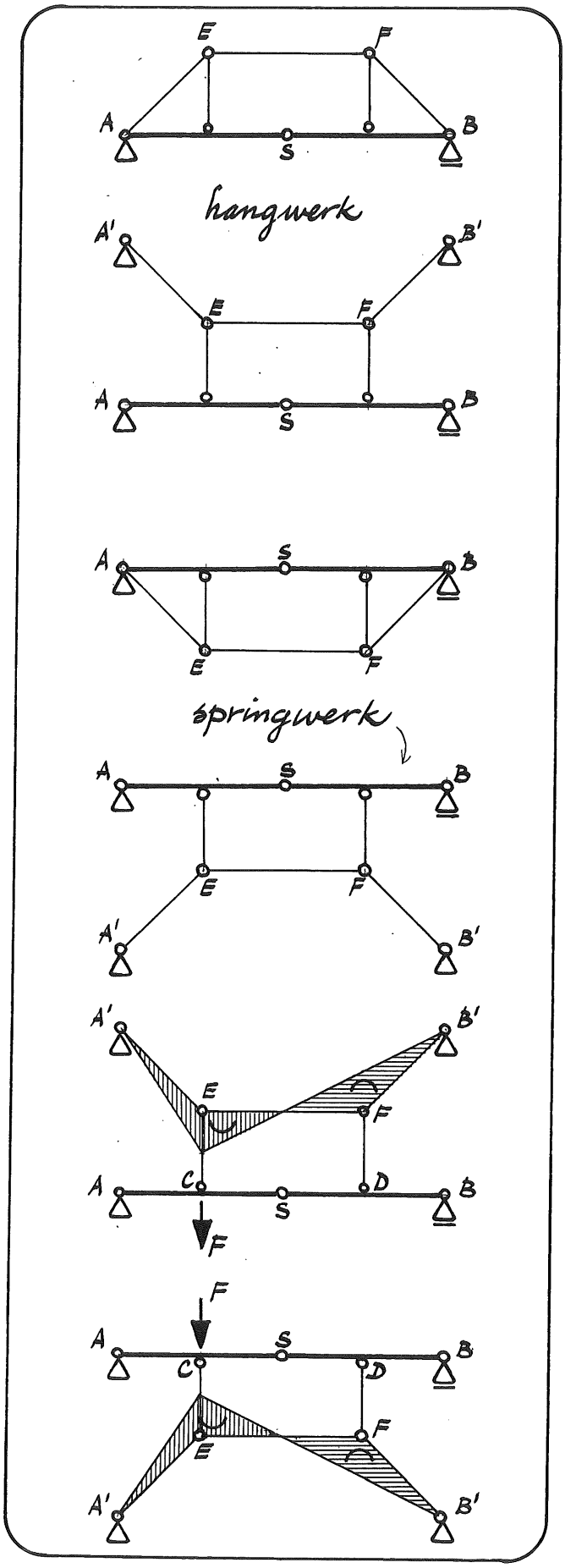
$S_{FD} = S_{EC}$

$S_{FB'} = S_{EA'}$

$S_{HB'} = S_{GA'}$

$S_{BB'} = S_{AA'}$

Uit de gevonden waarden volgt de belasting van balk ASB. Deze komt overeen met de belasting zoals eerder afgeleid uit de D-lijn.



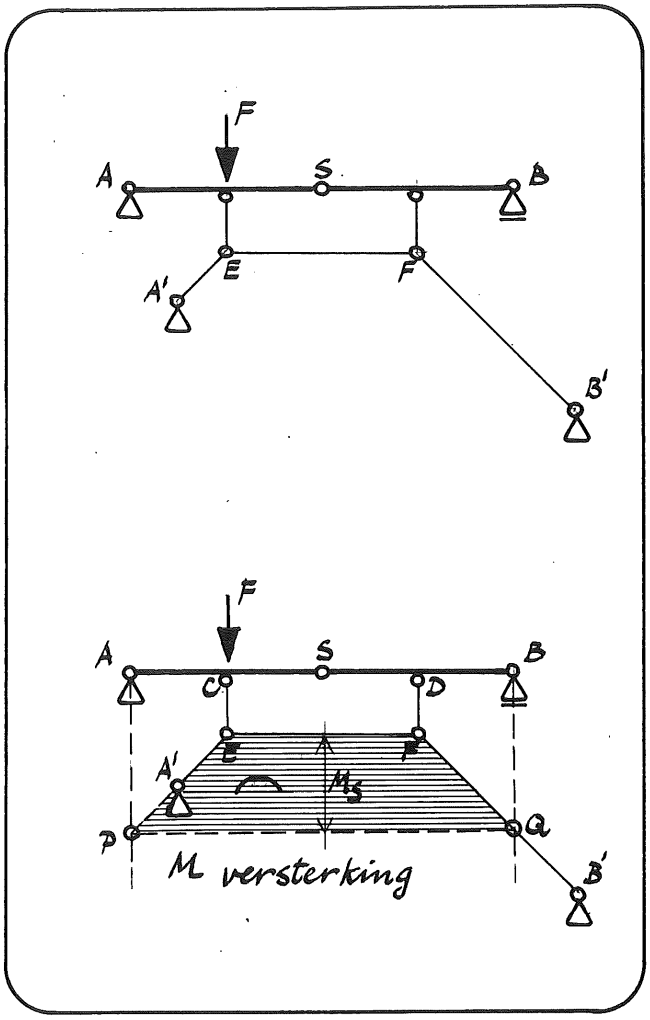
b. Springwerken

In het voorgaande hebben we gezien hoe de constructie van een hangwerk is af te leiden uit die van een versterkte balk, waarbij het staafsysteem is aangebracht aan de bovenzijde van de balk.
De reactiekrachten uit het hangwerk hebben we op verschillende manieren naar de fundering afgeleid. In feite hebben we niets anders gedaan dan het aanbrengen van steunpunten in A' en B'.

Op gelijke wijze kunnen we uit de constructie van een versterkte balk met een staafsysteem aan de onderzijde van de balk een constructie afleiden die het omgekeerde is van een hangwerk.
We spreken dan van een springwerk.

Het maakt voor de bepaling van de krachtsverdeling in de balk geen verschil of we te maken hebben met een hang- of een springwerk; bij gelijke belasting vinden we voor beide constructies dezelfde momentenlijn.

We merken op dat de lengte van de staven EC en FD niet van invloed is op de krachtsverdeling. Dit geldt zowel voor het hang- als het springwerk.



Ook de lengte van de staven A'E en B'F is niet van invloed op de krachtsverdeling in balk ASB.

We moeten in dit geval wel voorzichtig zijn bij het bepalen van de momentenlijn tengevolge van de versterking.
De gesloten stangenveelhoek die geldt als de momentenlijn tengevolge van de krachten S_{CE} en S_{DF} op balk ASB wordt dan bepaald door de punten E en F en door de punten P en Q op de verticalen door A en B.

3. ZELFTOETS

VRAGEN

1. Wat is een versterkte balk.

2. a. Wat is een hangwerk.
   b. Wat is een springwerk.

3. Hoe kunnen we poolfiguur en stangenveelhoek toepassen bij het bepalen van de krachtsverdeling in een versterkte balk.

4. In versterkte balken komt in de praktijk zelden een scharnier voor. In de balken, die in dit hoofdstuk worden behandeld, wel.
   Wat is daarvan de reden.

5. Waarom wordt bij een versterkte balk de versterking meestal onder de balk aangebracht.

6. Hoe kan de krachtsverdeling in een versterkte balk analytisch worden bepaald.

ANTWOORDEN

1. Een versterkte balk is een balkconstructie waarvan het draagvermogen wordt vergroot door een systeem van scharnierend aan elkaar verbonden staven.
2. Hangwerken en springwerken zijn balkconstructies waarvan het draagvermogen wordt vergroot door een systeem van scharnierend aan elkaar verbonden staven die worden opgehangen aan of ondersteund door extra aangebrachte steunpunten.

3. Omdat de staven van de versterkingsconstructie onderling scharnierend zijn verbonden kunnen we deze beschouwen als een stangenveelhoek. De vorm daarvan komt overeen met de vorm van de momentenlijn tengevolge van de krachten die de steunconstructie uitoefent op de balk.

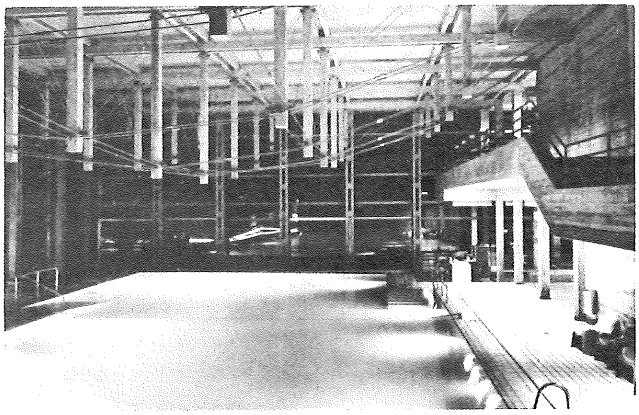
4. Een versterkte balk zonder scharnier is een statisch onbepaalde constructie. Door een scharnier aan te brengen wordt de constructie statisch bepaald en kunnen de krachten uit de evenwichtsvoorwaarden worden opgelost.

5. Als de versterking onder aan een balk wordt aangebracht treden in de - lange - horizontale en schuine staven trekkrachten op en in de - korte - verticale staven drukkrachten. Dit is gunstig i.v.m. het uitknikken.

6. De krachtsverdeling in een versterkte balk kan analytisch worden bepaald door de horizontale component H van de krachten in de steunstaven als extra onbekende naast de oplegreacties op te vatten. Het scharnier S levert nu de extra vergelijking ($\Sigma M_S = 0$ voor een deel van de constructie) die nodig is om de grootte van kracht H te kunnen bepalen.

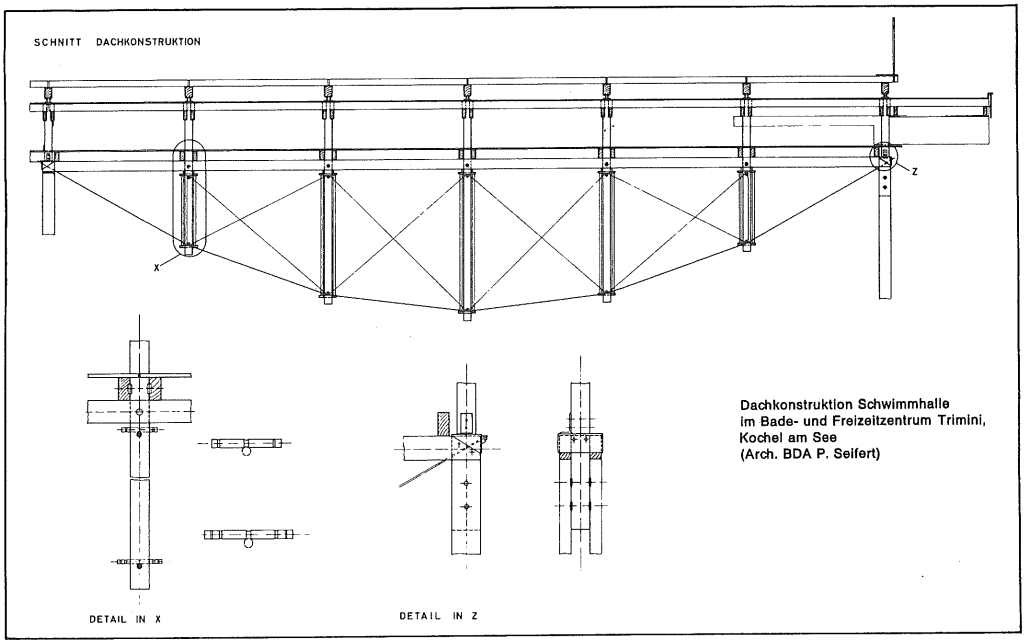
VRAGEN

7. Hoe kunnen we de momenten in de balk van een versterkte balkconstructie grafisch bepalen.



Ruimtelijke toepassing:

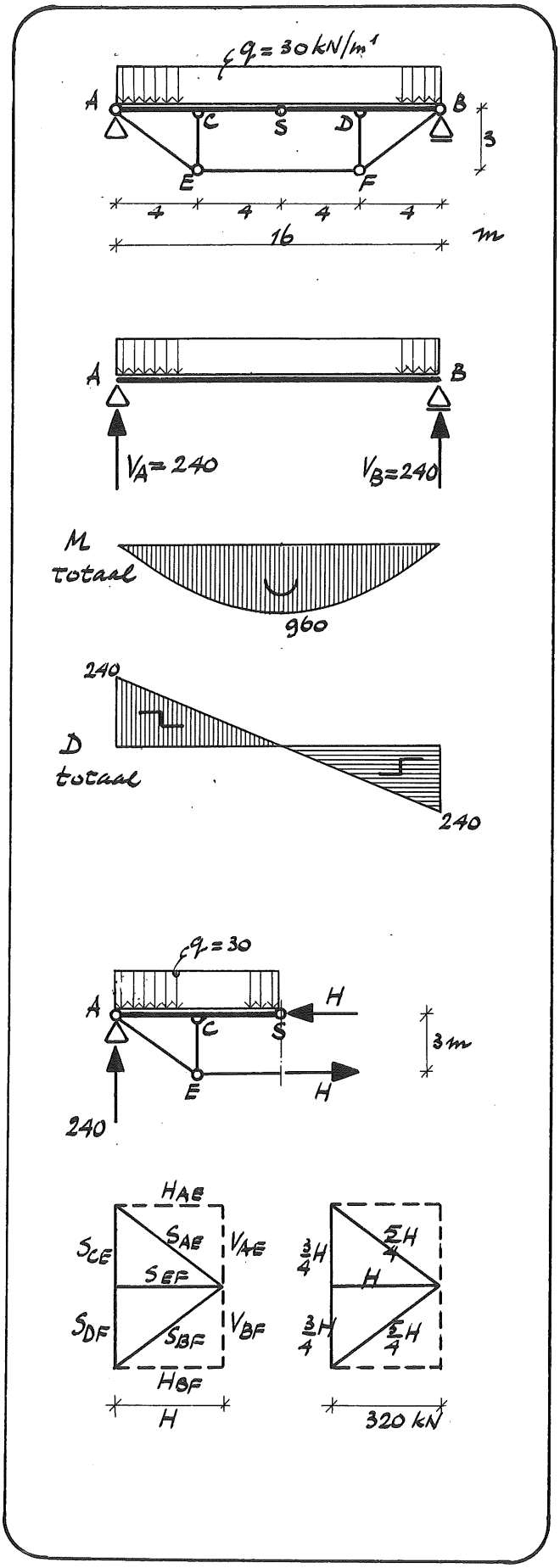
Bade- & Freizeitzentrum 'Trimini', Kochel am See, B.R.D.
Arch: P. Seifert



Dachkonstruktion Schwimmhalle
im Bade- und Freizeitzentrum Trimini,
Kochel am See
(Arch. BDA P. Seifert)

ANTWOORDEN

7. De momentenlijn van de balk van een versterkte balkconstructie kan grafisch worden bepaald door de momentenlijn voor de totale constructie (M_{totaal}) in het schema van de versterkte balk te tekenen zodanig dat deze momentenlijn (M_{totaal}) een stang van de versterking snijdt ter hoogte van het scharnier in de balk.
Het vlak begrensd door deze momentenlijn en de systeemlijnen van de versterking is het momentenvlak voor de balk (op een bepaalde schaal).



4. VOORBEELDEN

Voorbeeld 1

De getekende versterkte balk AB wordt belast door een gelijkmatig verdeelde belasting $q = 30\ kN/m^1$.

We bepalen eerst de M- en D-lijn volgens de analytische methode.

We beschouwen balk AB, zonder versterking en zonder scharnier, belast door $q = 30\ kN/m^1$.
We vinden:

$V_A = V_B = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 16 = 240\ kN$

$M_{max} = \frac{1}{8} \cdot 30 \cdot 16^2 = 960\ kNm$

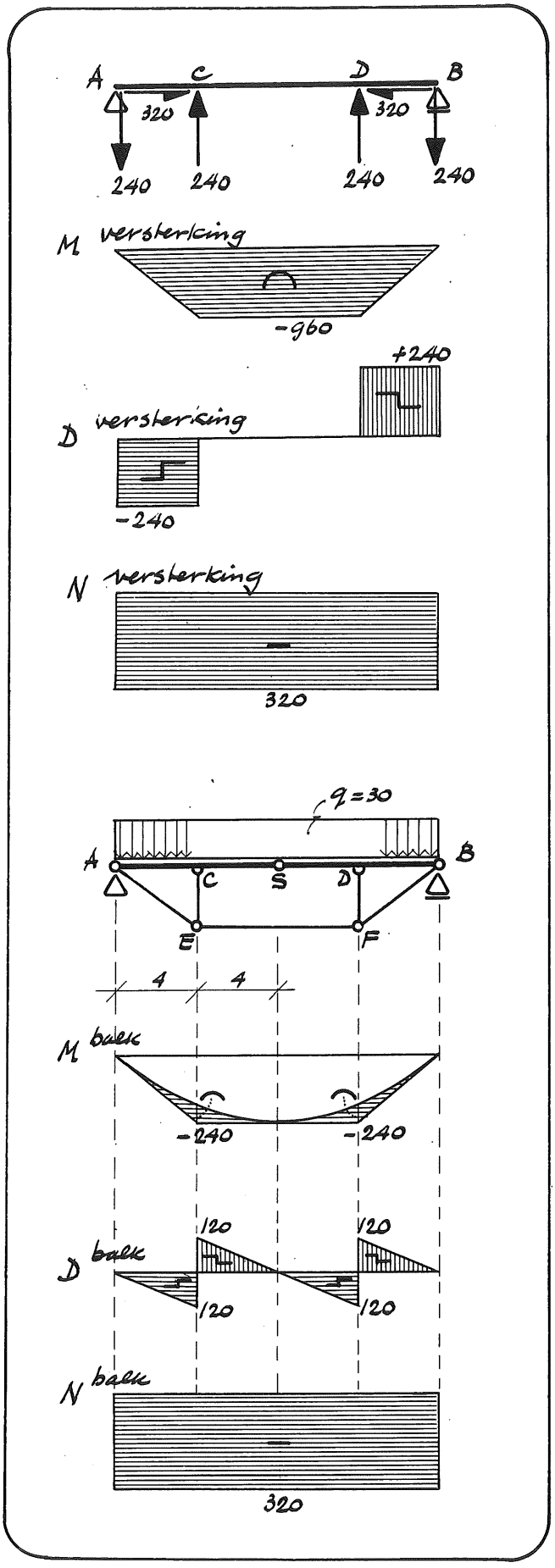
We kunnen nu voor deze belasting van balk AB de M- en D-lijn tekenen.

We brengen een snede aan over het scharnier S.
Voor het evenwicht geldt:

$\Sigma M_S = 0 \rightarrow -H \cdot 3 + 960 = 0 \rightarrow H = 320\ kN$

We tekenen de poolfiguur die behoort bij de stangenveelhoek AEFB.
We vinden voor de krachten in de versterking:

$S_{EF} = H = 320\ kN$
$S_{AE} = S_{BF} = \frac{5}{4} H = 400\ kN$
$H_{AE} = H_{BF} = H = 320\ kN$
$V_{AE} = V_{BF} = \frac{3}{4} H = 240\ kN$
$S_{CE} = S_{DF} = \frac{3}{4} H = 240\ kN$



We beschouwen weer balk AB, ditmaal belast door de krachten tengevolge van de versterking.

We kunnen voor deze belasting van balk AB M-, D- en N-lijn tekenen.
We vinden:

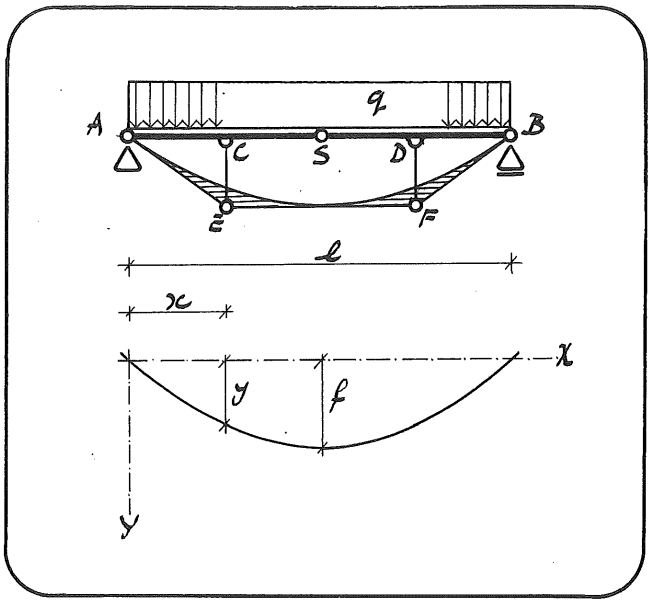
$M_{max} = -240 \cdot 4 = -960$ kNm

$D_{AC} = -240$ kN
$D_{CD} = 0$
$D_{DB} = +240$ kN

Door de M- en D-lijn van de twee belastinggevallen te superponeren vinden we de M- en D-lijn voor balk ASB.

Het maximum moment vinden we uit het oppervlak van het dwarskrachtenvlak.

$M = A_D = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 120 = 240$ kNm



Bepalen we de momentenlijn voor balk ASB volgens de grafische methode dan kunnen we dit doen door de momentenlijn voor de totale constructie (M_{totaal}) in het schema van de balk te tekenen.

De vergelijking van een parabool op het gegeven assenkruis is:

$$y = \frac{4f \cdot x \cdot (l-x)}{l^2} = 4 \cdot f \cdot \frac{x}{l} \cdot (1 - \frac{x}{l})$$

Gegeven is: $AC = \frac{1}{4}\ AB$

Dan is:

$$y_C = 4 \cdot f \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\ f$$

In de momentenlijn M_{totaal} is

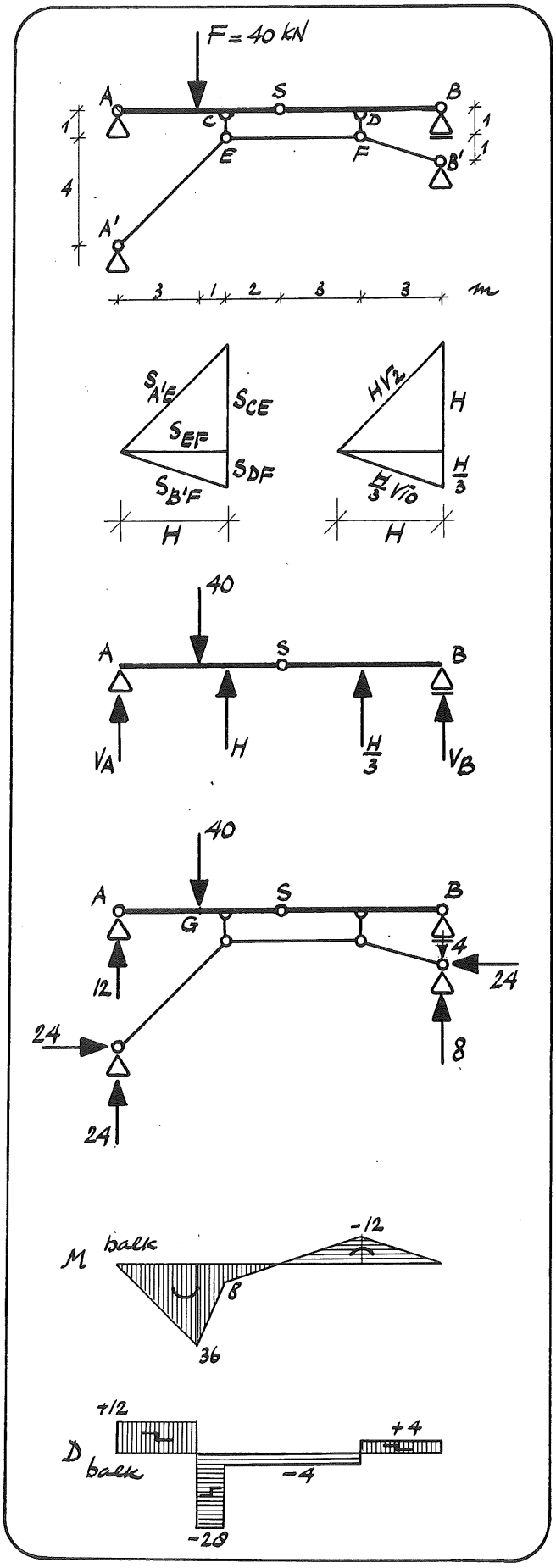
$$f = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2 = \frac{1}{8} \cdot 30 \cdot 16^2 = 960 \text{ kNm}$$

Dan zijn de maximum momenten in de doorsneden bij C en D:

$$M_C = M_D = f - \frac{3}{4}\ f = \frac{1}{4}\ f = \frac{1}{4} \cdot 960 = 240 \text{ kNm.}$$

Het is nu niet eenvoudig meer om de D-lijn voor balk ASB af te leiden uit de M-lijn. We moeten voor het bepalen van de D-lijn de krachten in de staven van de versterking weten. We kunnen daarvoor het beste de analytische methode gebruiken.

We zien dus dat bij een gelijkmatig verdeelde belasting op een versterkte balk de momentenlijn voor balk ASB snel is te bepalen volgens de grafische methode. Het bepalen van de dwarskrachtenlijn vergt echter een andere aanpak.



Voorbeeld 2

Het getekende springwerk wordt belast door een kracht F = 40 kN.

We bepalen weer eerst de M- en D-lijn volgens de analytische methode.

We tekenen de poolfiguur die behoort bij de stangenveelhoek A'EFB' en stellen de kracht in staaf EF gelijk aan H.

We vinden dan:

$S_{CE} = H$ en $S_{DF} = \frac{1}{3} H$

We kunnen nu de belasting van balk ASB tekenen.

Uit de evenwichtsvoorwaarden volgt:

$V_A = 30 - \frac{3}{4} H$

$V_B = 10 - \frac{7}{12} H$

$\Sigma M_S = 0 \rightarrow (30 - \frac{3}{4} H) . 6 - 40 . 3 + H . 2 = 0$

Waaruit: H = 24 kN

Dan is : $V_A = 30 - \frac{3}{4} . 24 = 12$ kN

$V_B = 10 - \frac{7}{12} . 24 = - 4$ kN

Met deze gegevens zijn de M- en D-lijn voor balk ASB te bepalen.

We vinden:

$M_G = V_A . 3 = 12 . 3 = 36$ kNm

$M_C = V_A . 4 - 40 . 1 = 12 . 4 - 40 = 8$ kNm

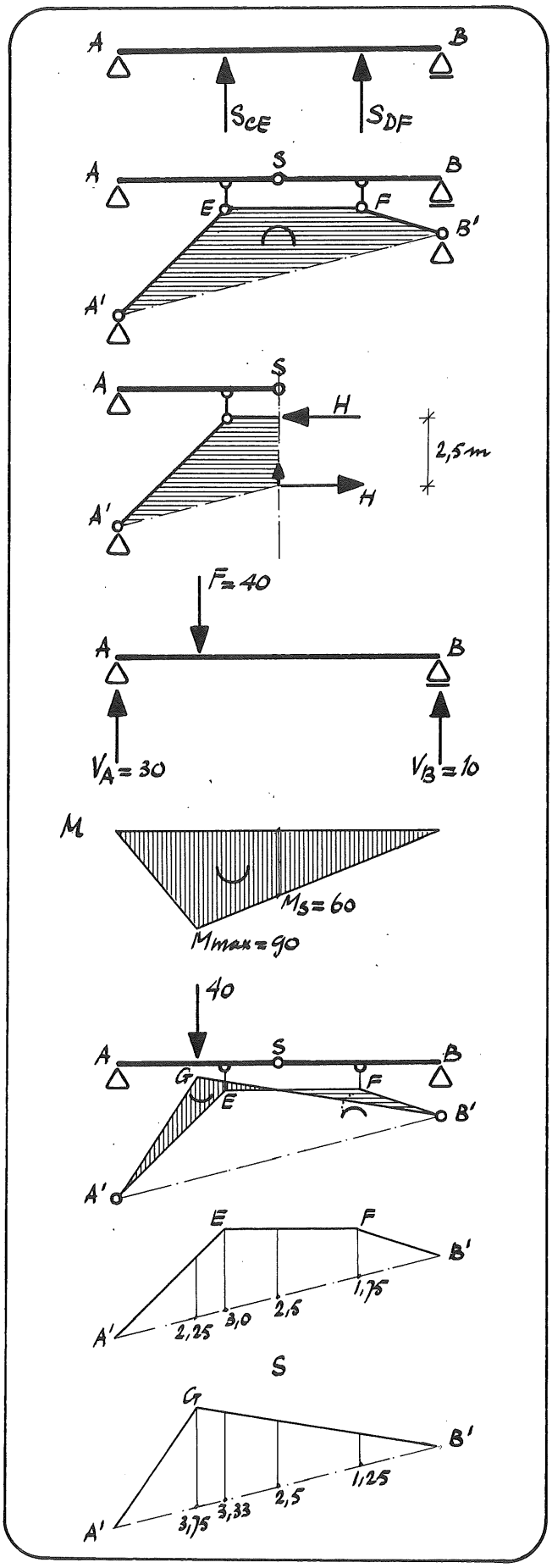
$M_D = V_B . 3 = - 4 . 3 = - 12$ kNm

$D_{AG} = V_A = 12$ kN

$D_{GC} = 12 - 40 = - 28$ kN

$D_{CD} = 12 - 40 + 24 = - 4$ kN

$D_{DB} = V_B = 4$ kN



We bepalen nu de M-lijn voor balk ASB volgens de grafische methode.

De momentenlijn voor balk AB (zonder scharnier) tengevolge van de belasting door de staafkrachten S_{CE} en S_{DF} wordt bepaald door de gesloten stangenveelhoek A'EFB'.

Het moment ter plaatse van S is dan:
$M_S = - H . 2,5.$

De momentenlijn voor balk AB (zonder scharnier) tengevolge van de belasting door kracht F = 40 kN is eenvoudig te bepalen.
We vinden:
$M_{max} = 30 . 3 = 90$ kNm
$M_S = 10 . 6 = 60$ kNm

Uit de voorwaarde $\Sigma M_S = 0$ volgt:
$60 - H . 2,5 = 0 \rightarrow H = 24$ kN

Tekenen we de gevonden momentenlijnen in het schema van het springwerk dan vinden we snel de momentenlijn voor balk ASB.
De maximum momenten kunnen worden bepaald uit de maten van de meetkundige figuren die de momentenlijn bepaald.

Ter plaatse van S is de ordinaat in beide figuren 2,5 m. Deze maat komt overeen met een moment van 60 kNm.
Een lengte van 1 m komt dus overeen met een moment van $\frac{60}{2,5} = 24$ kNm.

We vinden:

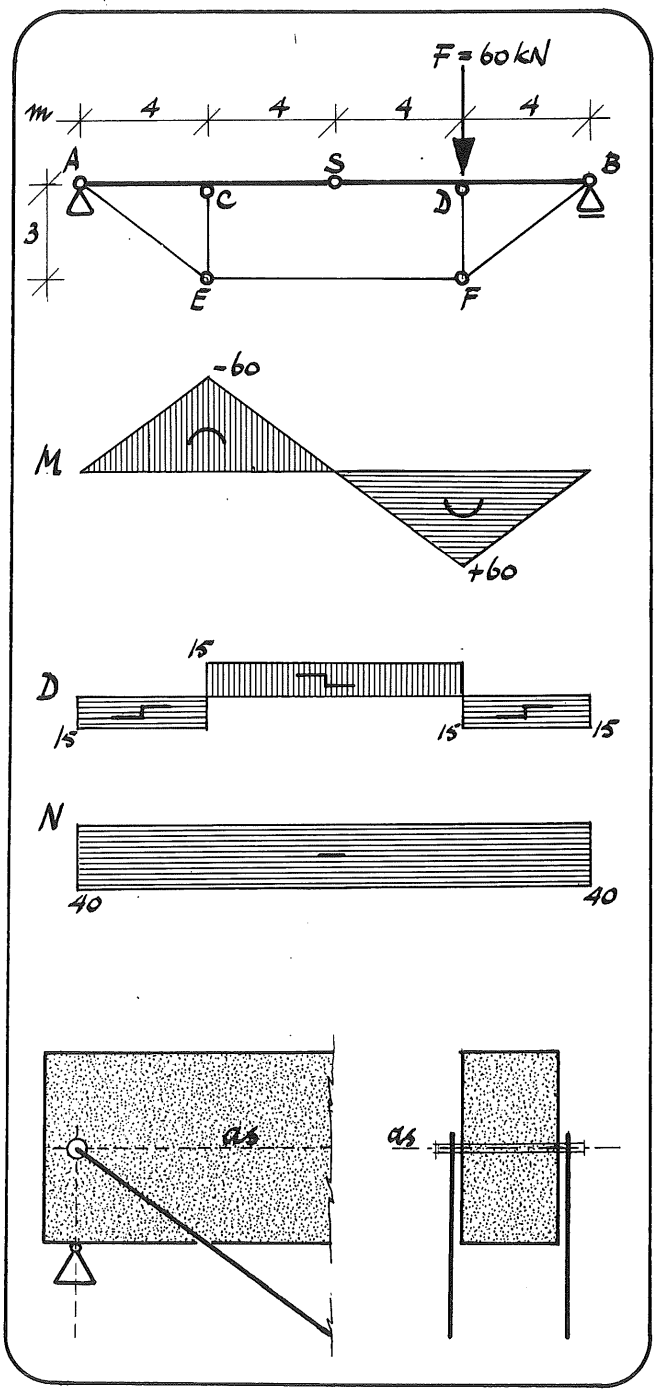
$M_G = 3,75 - 2,25 = 1,5$ m = 36 kNm
$M_C = 3,33 - 3,0 = 0,33$ m = 8 kNm
$M_D = 1,25 - 1,75 = - 0,5$ m = - 12 kNm

Voorbeeld 3

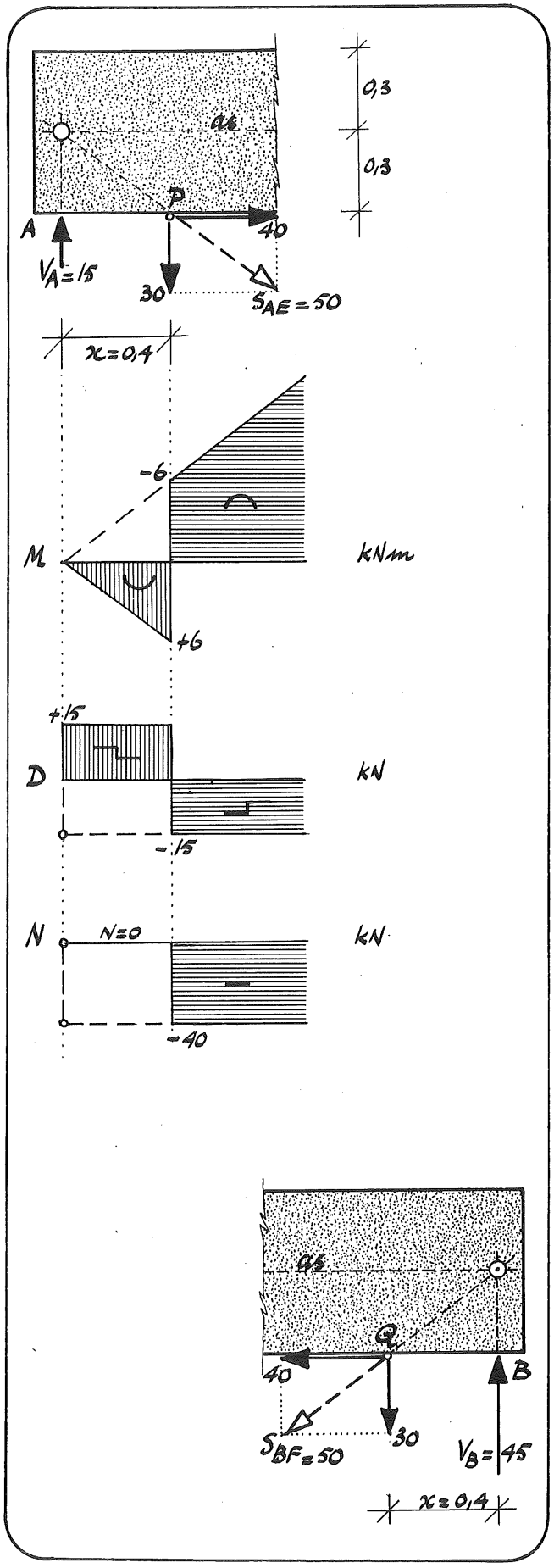
Een balk schematiseren we meestal tot een rechte lijn.
In hoofdstuk 7 hebben we reeds gewezen op het gevaar van deze schematisering indien een balk wordt belast door normaalkrachten.

In het voorgaande hebben we gezien dat balk ASB van een versterkte balkconstructie altijd wordt belast door normaalkrachten. We zullen dus moeten nagaan of de krachtsverdeling in de balk, bepaald met behulp van het schema van de balk, wel in overeenstemming is met de werkelijkheid.

We doen dit voor de gegeven balk die wordt belast door de kracht F = 60 kN.
De krachtsverdeling in deze balk hebben we al eerder in een voorbeeld bepaald.



Indien we staaf AE en BF uitvoeren als een dubbele stang en deze dubbele stang bevestigen aan een bout door de balk dan is de krachtsverdeling voor balk ASB precies als uit het schema volgt.
De bout moet dan wel zijn aangebracht in de as van de balk en precies boven het steunpunt zoals in de figuur is aangegeven.



Indien we staaf AE en BF bevestigen aan de onderzijde van de balk dan is het detail bij steunpunt A als getekend. Theoretisch snijden de werklijnen van de oplegreactie in A (15 kN) en de staafkracht S_{AE} (50 kN) elkaar op de as van de balk.
Stel de balk is 0,6 m hoog. Dan grijpt de kracht S_{AE} in werkelijkheid in punt P aan op 0,4 m binnen het steunpunt.
Ter plaatse van P is het moment gelijk aan:
$M_{x=0,4} = 15 \cdot 0,4 = + 6$ kNm.
Even rechts van P is het moment:
$M = 15 \cdot 0,4 - 40 \cdot 0,3 = - 6$ kNm.

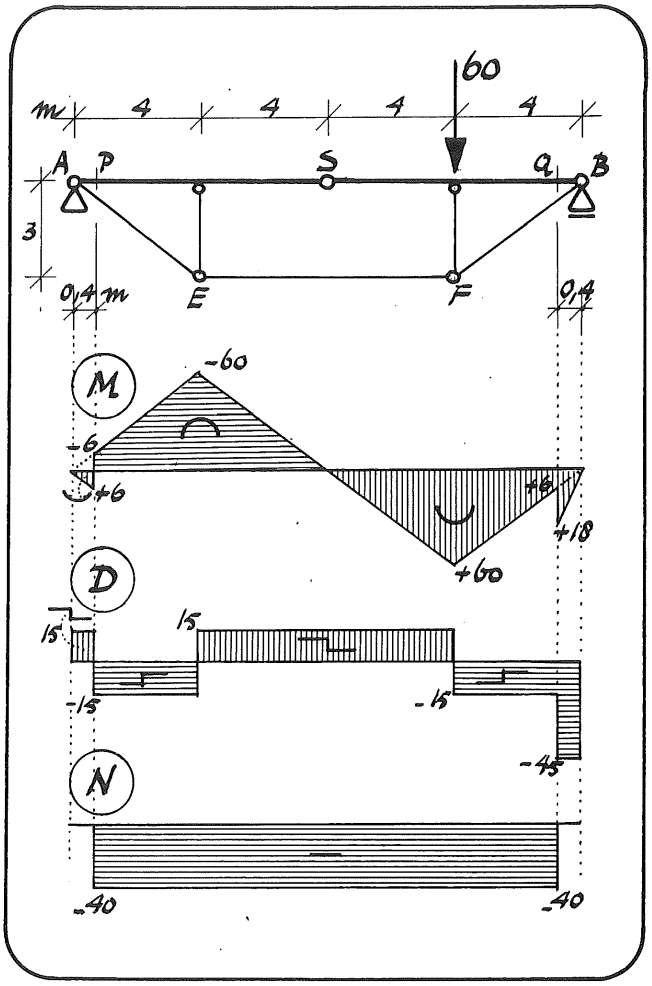
Tekenen we nu de momentenlijn dan verloopt deze voor het gedeelte AP niet volgens de streeplijn, zoals uit het schema zou volgen, maar volgens de getrokken lijn.

Ook het verloop van de dwarskrachten - en normaalkrachtenlijn - vertoont over het gedeelte AP afwijkingen met de lijnen die volgen uit het schema.

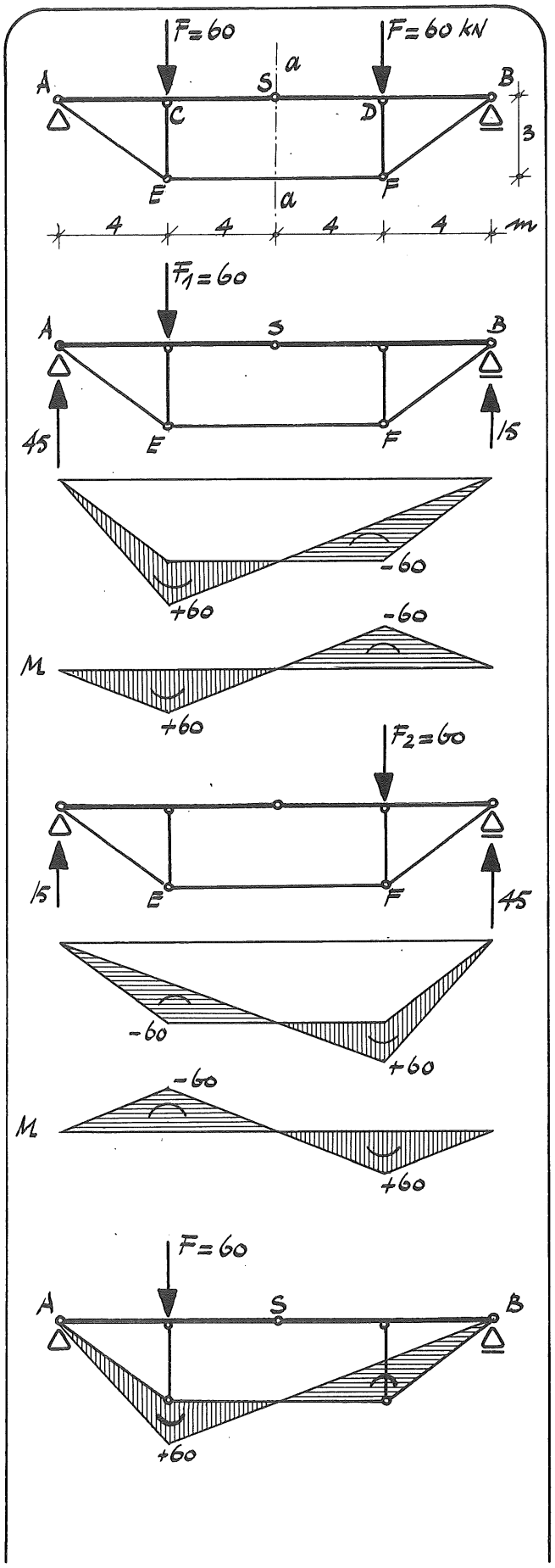
Bekijken we het detail bij schemapunt B dan vinden we voor het moment ter plaatse van Q:
$M_{x=0,4} = 45 \cdot 0,4 = + 18$ kNm

Even links van Q is het moment:
$M = 45 \cdot 0,4 - 40 \cdot 0,3 = + 6$ kNm

Verder is $D_{BQ} = - 45$ kN.



Indien staaf AE en BF aan de onderzijde van de balk zijn bevestigd op 0,4 m binnen de opleggingen dan gelden dus de getekende M-, D- en N-lijn.



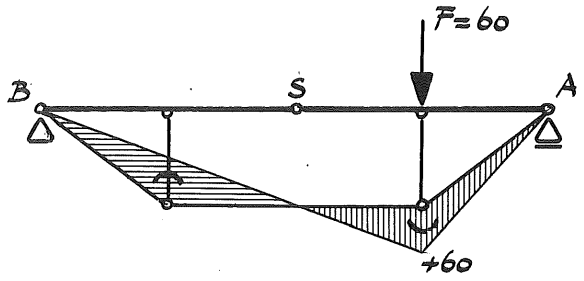
Voorbeeld 4

Een versterkte balk ASB wordt in C en D belast door F = 60 kN.
Deze versterkte balk is symmetrisch t.o.v. de lijn a-a. Ook de belasting is symmetrisch t.o.v. deze lijn. We bepalen de M-lijn en de kracht in staaf EF door de krachten F_1 en F_2 één voor één te laten aangrijpen.

a. Voor F_1 = 60 kN vinden we de getekende M-lijn.
Kracht S_{EF} = H = 40 kN (trek).

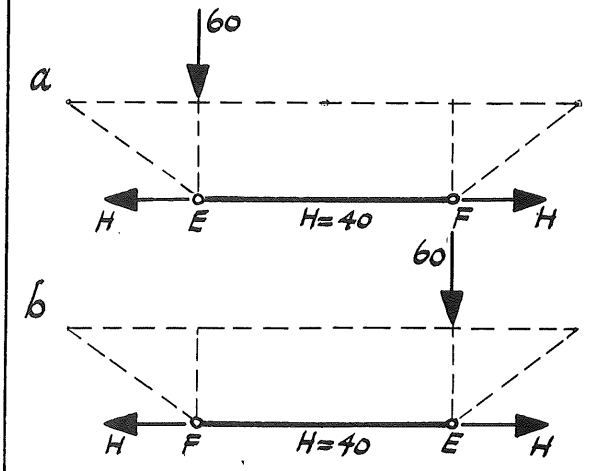
b. Voor F_2 = 60 kN vinden we een M-lijn die dezelfde waarden heeft als die ten gevolge van kracht F_1, maar met verschillende tekens. De staafkracht S_{EF} is hier weer S_{EF} = H = 40 kN (trek).

We beschouwen de versterkte balk nog eens wat nader:
Als we geval a. (aan de voorkant) bekijken, zien we een versterkte balk, belast door een kracht F = 60 kN, die links aangrijpt en in het linkerdeel een positief moment M = 60 kNm veroorzaakt.

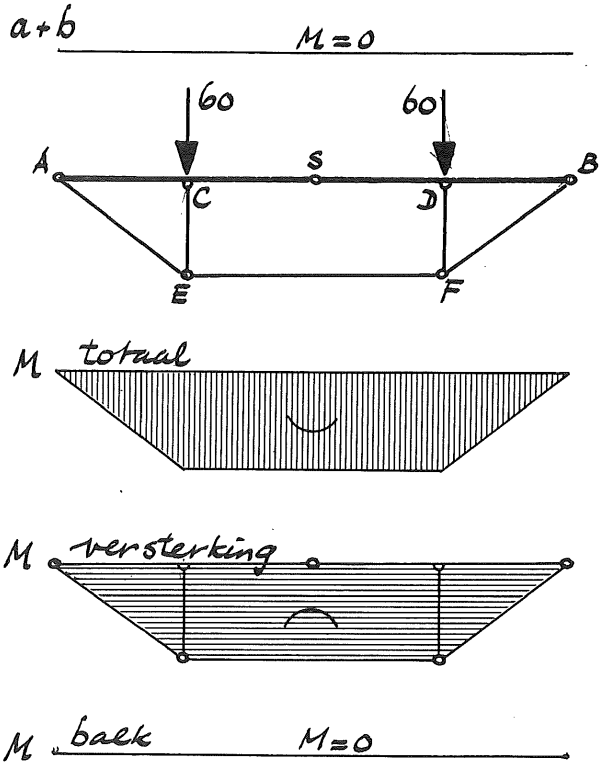


Als we deze balk aan de achterkant bekijken - wat bij een balk, die in de ruimte hangt altijd mogelijk is - zien we dezelfde balk, maar nu belast door een kracht F = 60 kN, die rechts aangrijpt en in het rechterdeel een positief moment M = 60 kNm veroorzaakt. We hebben dan geval b.

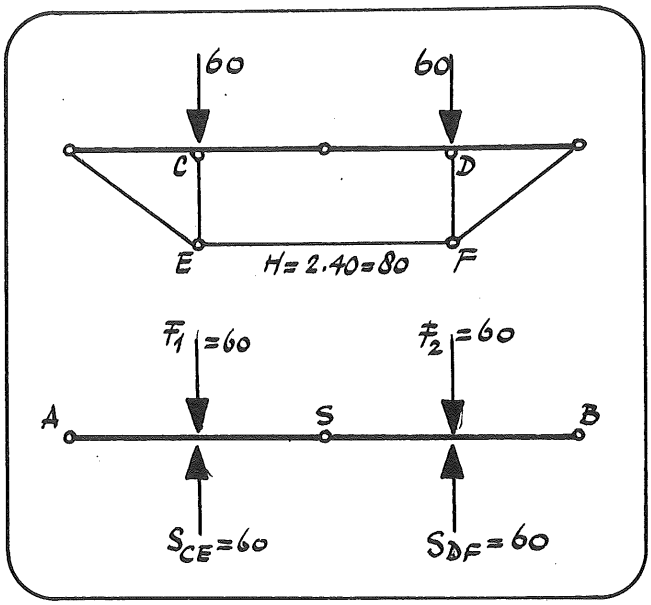
We zien dat geval b, van voren bekeken, overeenkomt met geval a, van achteren bekeken.



Dit verklaart ook waarom in geval a. en geval b. de kracht in de horizontale staaf EF even groot is:
S_{EF} = H = 40 kN (trek).
We bekijken immers dezelfde balk met dezelfde belasting.



Als we de gevallen a. en b. superponeren, vinden we dat het moment in balk ASB in elke doorsnede gelijk is aan nul.
Dit kan worden verklaard door M-totaal (voor de hele constructie) en M-versterking (alleen t.g.v. de versterkingsconstructie) afzonderlijk te tekenen.
We zien dat M-totaal exact dezelfde vorm heeft als M-versterking. Als geldt dat M_S = 0 dan volgt daaruit dat de twee momentenvlakken precies even groot moeten zijn: M_{balk} = 0.

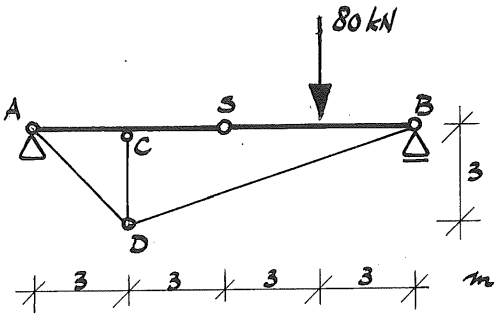


Als we geval a. en b. superponeren zien we ook dat de kracht in staaf EF tweemaal zo groot wordt, $S_{EF} = 2 \cdot 40 = 80$ kN (trek).

Daaruit is af te leiden dat:
$S_{CE} = S_{DF} = 60$ kN.

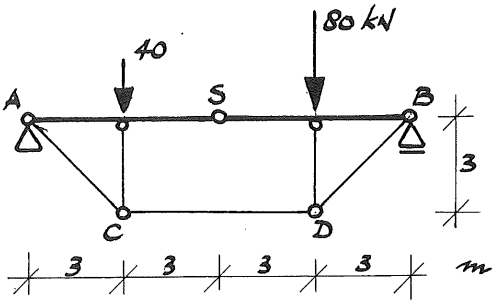
Tekenen we nu balk ASB met de erop werkende krachten dan is ook nu eenvoudig in te zien, dat de momenten in ASB nul moeten zijn.

5. VRAAGSTUKKEN



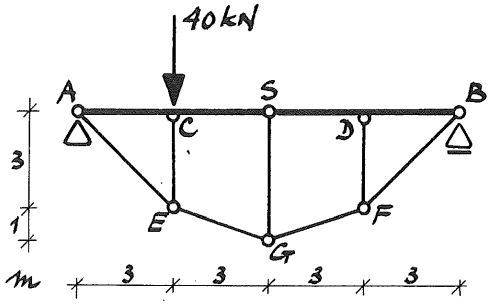
Vraagstuk 1

Bepaal de momentenlijn van deze versterkte balk met de grafische methode.
Bepaal bovendien de kracht in de staaf CD.



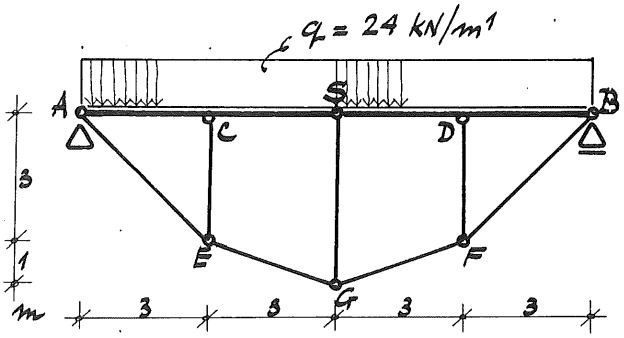
Vraagstuk 2

Bepaal de oplegreacties, de kracht in de horizontale staaf CD en de momentenlijn van deze versterkte balk.



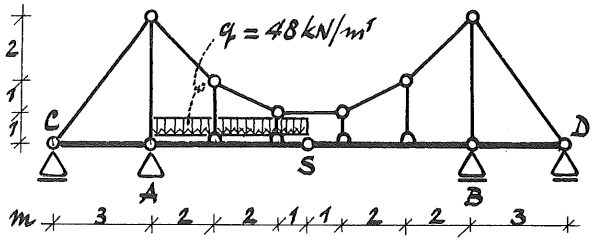
Vraagstuk 3

Teken de M-, D- en N-lijn van de balk ASB en bepaal de krachten in de staven.



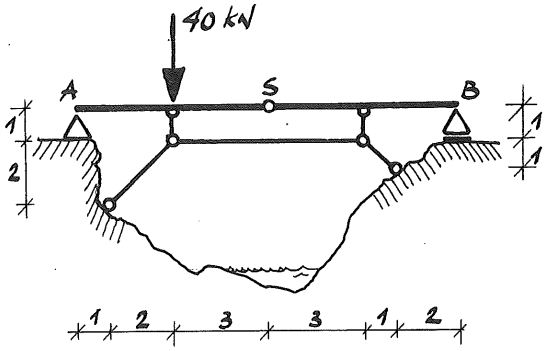
Vraagstuk 4

Teken de M-, D- en N-lijn van balk ASB en bepaal de krachten in de staven.



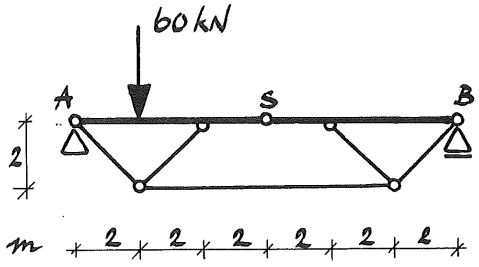
Vraagstuk 5

Teken van de balk ASB van dit hangwerk de M-, N- en D-lijn.



Vraagstuk 6

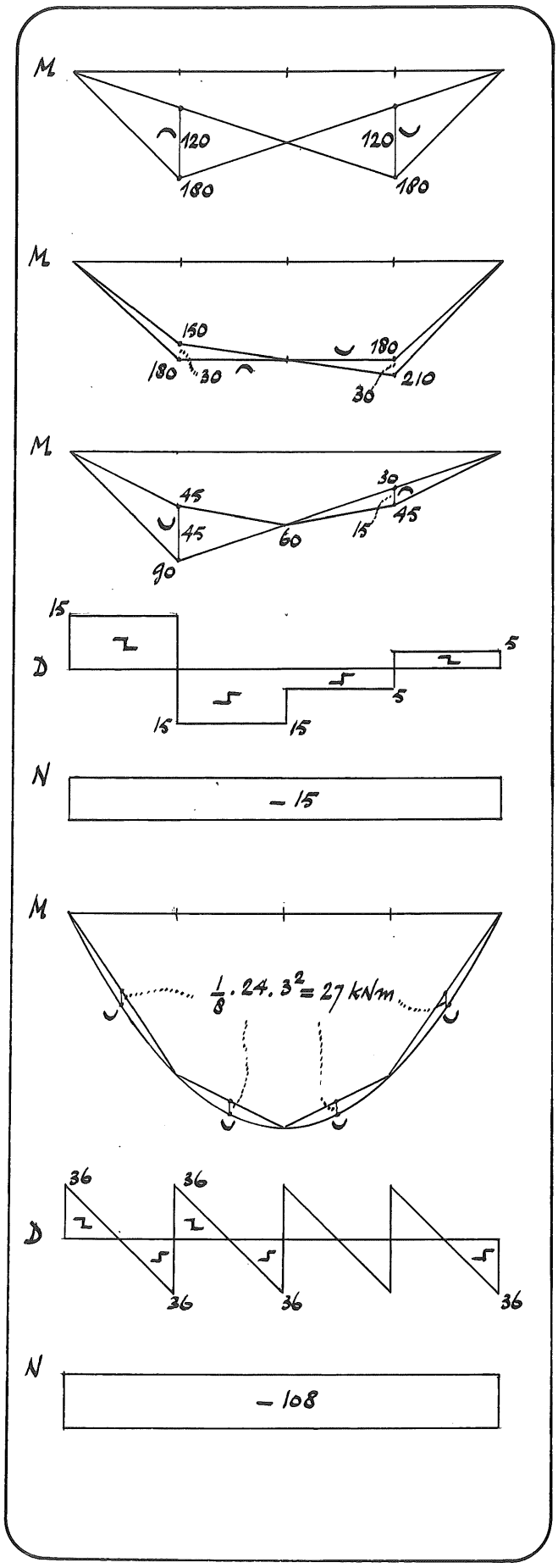
Teken de M-, N- en D-lijnen van balk ASB van het getekende springwerk.



Vraagstuk 7

Teken de M-, N- en D-lijnen van balk ASB van deze versterkte balk.

Waarschuwing: Maak dit vraagstuk niet al te klakkeloos.



ANTWOORDEN

1. $S_{CD} = 80$ kN (druk)

2. $V_A = 50$ kN

   $V_B = 70$ kN

   $S_{CD} = 60$ kN

3. $S_{DF} = S_{CE} = S_{SG} = -10$ kN

   $S_{GE} = S_{GF} = +5\sqrt{10}$

   $S_{AE} = S_{BF} = +15\sqrt{2}$

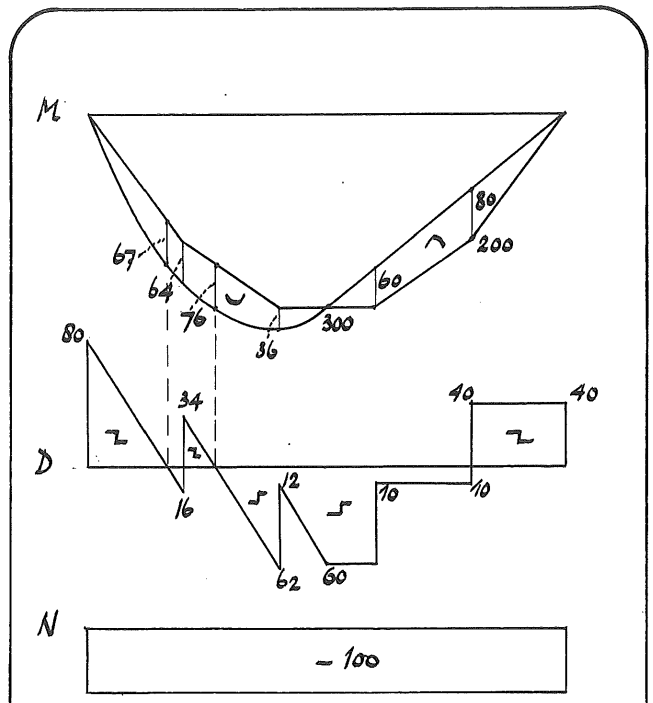
4. $S_{CE} = S_{SG} = S_{DF} = -72$ kN

   $S_{AE} = S_{BF} = +108\sqrt{2}$

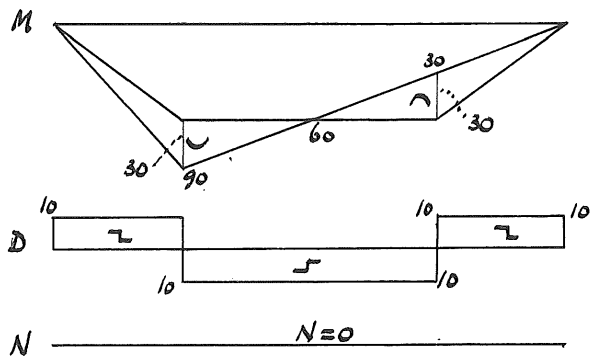
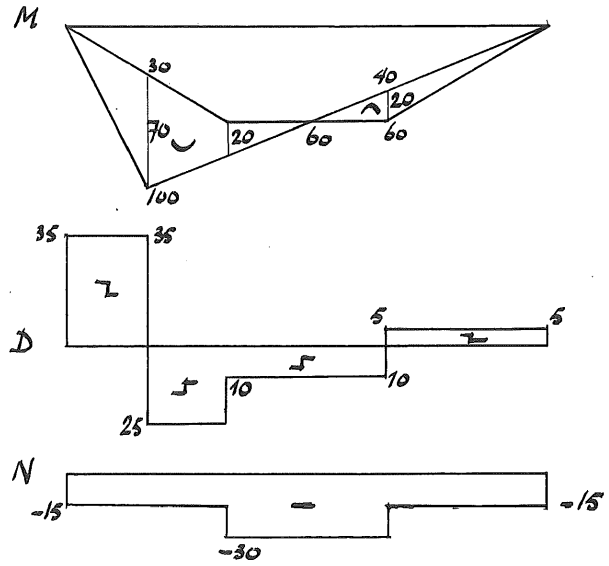
   $S_{EG} = S_{GF} = +36\sqrt{10}$

5.

$$H = \frac{300}{3} = 100 \text{ kN}$$



6.



7.