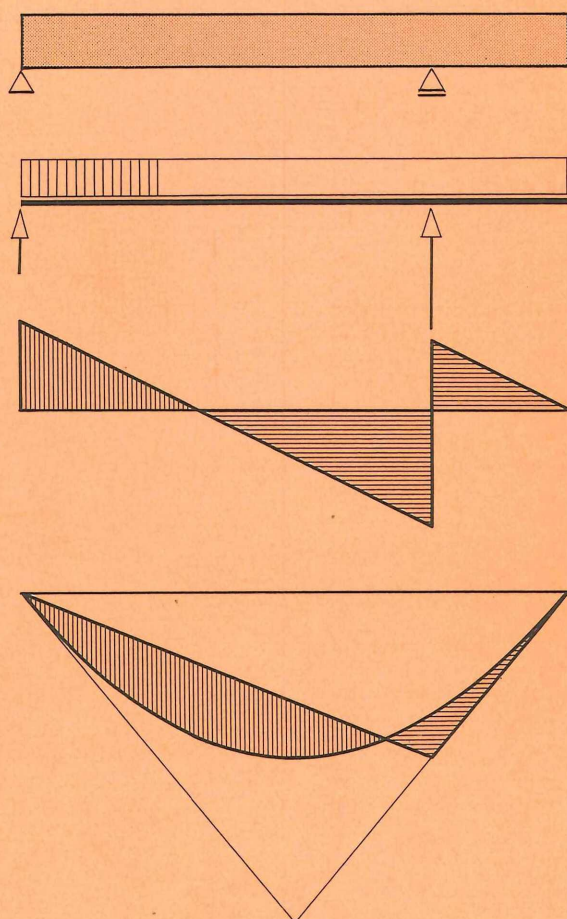


## Krachtswerking in liggers



sector toegepaste mechanica

B041A110

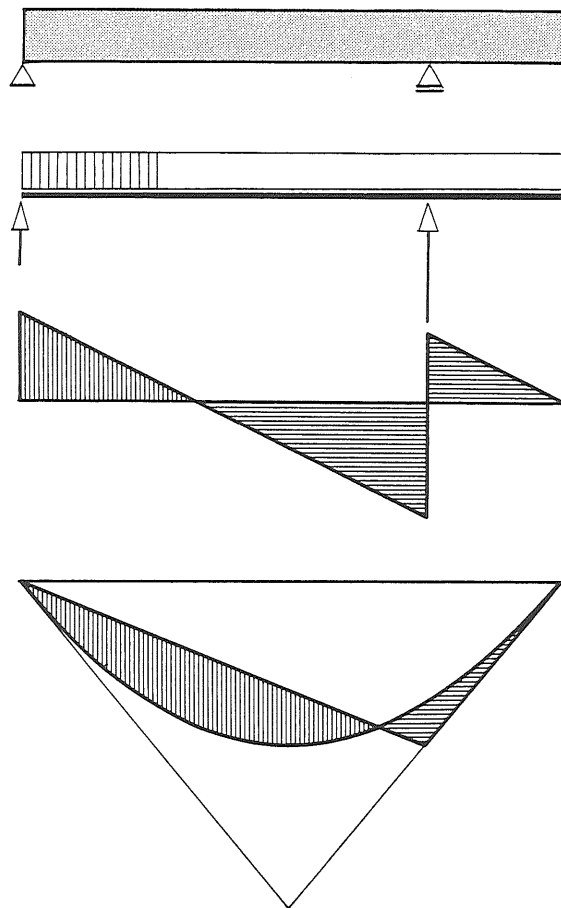
P handleiding statisch bepaalde constructies deel 1

krachtswerking in liggers, staven en kabels

prof. ir. W.J. Beranek

november 1980

# Krachtswerking in liggers



prof. ir. W.J. Beranek

INLEIDING

De collegestof Toegepaste Mechanica voor het eerste en het tweede studiejaar aan de afdeling Bouwkunde, is verzameld in een aantal dictaten, geschreven door prof. Ir. D. Dicke en Ir. W.A. Eisma. In de huidige vorm zijn de dictaten bestemd voor zelfstudie en onderverdeeld in een aantal 'units', één voor elke collegeweek.

De invoering van een geïntegreerd college draagconstructies in het tweede studiejaar - vanaf 1980-'81 - is aanleiding geweest om de collegestof toegepaste mechanica te herzien.

Voor een goede aansluiting op het college draagconstructies is het eerste jaars college toegepaste mechanica als volgt gewijzigd:

- 1<sup>e</sup> trimester: Krachtswerking in liggers (normaal-krachten, dwarskrachten en momenten).
- 2<sup>e</sup> trimester: Spanningen en vervormingen in liggers; dimensioneren.
- 3<sup>e</sup> trimester: Krachtswerking in samengestelde constructies (vakwerken, driescharnierspanen).

Op deze wijze is de krachtswerking in, en het dimensioneren van, statisch bepaalde constructies geheel afgerond en is tevens de aanzet al gegeven voor het berekenen van statisch onbepaalde constructies.

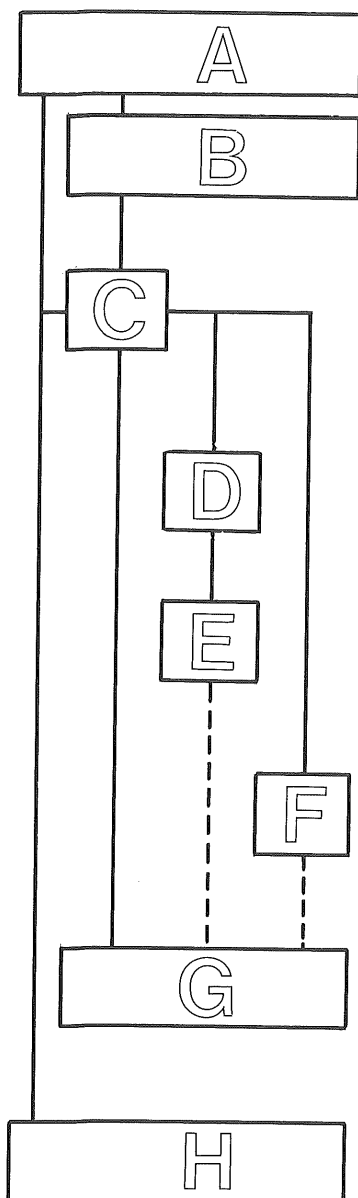
De hoofdindeling: statisch bepaalde constructies in het eerste jaar en statisch onbepaalde constructies in het tweede jaar, is behouden gebleven.

In deze handleiding wordt de stof in de nieuwe volgorde op beknopte wijze weergegeven. Hierbij wordt uitsluitend op de mechanica aspecten van de collegestof ingegaan. In het eerste trimester betreft dit de krachtswerking in statisch bepaalde liggers, staven en kabels. Alle krachten en onderdelen van de constructie worden hierbij in één en hetzelfde (verticale) platte vlak aangenomen. Het ruimtelijk aspect komt enigszins aan de orde in het 2<sup>e</sup> trimester en in sterkere mate in het 3<sup>e</sup> trimester.

# INHOUD:

De inhoud is verdeeld in acht 'blokken' aangegeven met de letters A t/m H. De cijfers in elk blok geven heel globaal aan in welke 'unit' van het dictaat de betreffende stof is terug te vinden.

STROOMDIAGRAM



**A** In blok A worden de basisbegrippen behandeld om te kunnen werken met krachten en momenten.

**B** In blok B worden de oplegreacties bepaald voor liggers op twee steunpunten, ingeklemde liggers en liggers met pendelstijlen.

**C** In blok C wordt aangegeven hoe de doorsnede grootheden: normaalkracht, dwarskracht en buigend moment kunnen worden bepaald door het aanbrengen van een sneede en het beschouwen van het evenwicht van het 'afgesneden' deel. Aanbevolen voor een plaatselijke controle.

**D** In blok D worden de dwarskrachten en momenten in een ligger bepaald door integratie. Aanbevolen manier voor het tekenen van D- en M-lijnen. Meest universele manier met nuttige controle mogelijkheden.

**E** In blok E wordt voor een aantal soorten van belasting aangegeven hoe men door integratie zo effectief mogelijk tot momenten- en dwarskrachtenlijnen komt. Toepassingen van de methode gegeven in blok D.

**F** In blok F worden de momentenlijnen bepaald door superpositie. Een zeer verhelderende methode indien de 'basisbelastinggevallen' betrekkelijk eenvoudig zijn. De methode wordt ook bij statisch onbepaalde constructies veel toegepast.

**G** In blok G worden wat ingewikkelder vormen van liggers en staven behandeld. Krachtenwerking in liggers met pendelstijlen, in liggers en kolommen met dwarsstaven en in doorgaande liggers met scharnieren.

**H** In blok H worden poolfiguur en stangenkromme behandeld. Enerzijds om de krachtenwerking in kabels te kunnen bepalen, anderzijds om op grafische wijze zowel momentenlijnen als elastische lijnen (doorbuigingslijnen) te kunnen tekenen.

De methoden besproken in blok C, blok D+E en blok F zijn dus drie varianten om de krachtenwerking in liggers te kunnen bepalen. Blok H geeft dan nog een grafische variant. In het stroomdiagram op de linkerzijde is aangegeven welke voorkennis nodig is om de stof van een bepaald blok met vrucht te kunnen bestuderen.

## A

- 1 BASISGROOTHEDEN
  1. Kracht
  2. Moment
  3. Koppel
- 2 SAMENSTELLEN VAN KRACHTEN DIE DOOR ÉÉN PUNT GAAN
  4. Parallelogram van krachten
  5. Analytische uitwerking
- 3
  6. Krachtendriehoek
  7. Krachtenveelhoek
- 4 VERPLAATSEN VAN KRACHTEN
  8. Verplaatsen van een kracht
  9. Samenstellen van een kracht en een koppel
- 5 SAMENSTELLEN VAN KRACHTEN DIE NIET DOOR EEN PUNT GAAN
  10. Grafische methode
- 6
  - 11a Analytisch-grafische methode
  - 11b Volledig analytische methode
- 7
  12. Samenstellen van evenwijdige krachten
- 8 ONTBINDEN VAN KRACHTEN
  13. Ontbinden in willekeurige richtingen
  14. Ontbinden in onderling loodrechte richtingen
- 9
  15. Ontbinden in twee gegeven richtingen
  16. Ontbinden langs drie gegeven werklijnen

2  
3

## B

- 10 UITWENDIG EVENWICHT
  17. Wet van Newton
  18. Ondersteuning
- 11 EVENWICHTSVOORWAARDEN
  19. Evenwichtsvoorwaarden voor een lichaam
- 12
  20. Variant voor de evenwichtsvoorwaarden
  21. Voorbeelden
- 13 OPLEGGINGEN
  22. Statisch bepaald en statisch onbepaald
  23. Soorten opleggingen
- 14
  24. Pendelstijlen
- 15 STATISCH BEPAALDE LIGGERS
  25. Basisvormen statisch bepaalde liggers
- 16 LIGGERS MET PENDELSTIJLEN
  26. Statisch bepaalde liggers met pendelstijlen
- 17
  27. Voorbeelden
- 18
  28. Onjuiste varianten met pendelstijlen
- 19 TEKENAFSPRAKEN UITWENDIG EVENWICHT
  29. Teken van de reactiekrachten
  30. Inwendige krachten

3  
4  
5



## C

- |    |   |        |
|----|---|--------|
| 20 | DOORSNEDE GROOTHEDEN  |        |
|    | 31. Bepaling van de doorsnede grootheden N, D en M                  | 6<br>7 |
| 21 | TEKENAFSPRAKEN INWENDIG EVENWICHT                                   |        |
|    | 32. Variant voor de bepaling van de snedekrachten                   |        |
|    | 33. Tekenen van de snedekrachten                                    |        |
| 22 | BEREKENING DOORSNEDE GROOTHEDEN                                     |        |
|    | 34. Symbolen voor N, D en M   |        |
|    | 35. Berekening van N, D en M  |        |
| 23 | 36. Voorbeelden   |        |
| 24 | DIAGRAMMEN VOOR DE DOORSNEDE GROOTHEDEN                             |        |
|    | 37. Puntlast op een ligger  |        |
| 25 | 38. Gelijkmatig verdeelde belasting op een ligger                   |        |
|    | 39. Routinematige bepaling van het buigende moment in een doorsnede |        |

## D

- |    |   |   |
|----|---|---|
| 26 | EVENWICHTSBESCHOUWINGEN LIGGERELEMENTJE                                 |   |
|    | 40. Evenwichtsbeschouwingen op een liggerelementje                      | 7 |
| 27 | BEPALING DWARSKRACHTEN EN MOMENTEN DOOR INTEGRATIE                      |   |
|    | 41. Bepaling van de dwarskrachten door integratie van het belastingvlak |   |
|    | 42. Behandeling van puntlasten  |   |
| 28 | 43. Voorbeeld voor de bepaling van de dwarskrachten                     |   |
| 29 | 44. Bepaling van de momenten door integratie van het dwarskrachtvlak    |   |
|    | 45. Voorbeeld voor de bepaling van de momenten                          |   |
| 30 | DWARSKRACHTEN- EN MOMENTENLIJNEN BIJ GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING    |   |
|    | 46. Constante gelijkmatig verdeelde belasting                           |   |
| 31 | 47. Parabolisch momentenverloop bij een q-belasting                     |   |
|    | 48. De gelijkmatig verdeelde belasting ontbreekt op een liggerdeel      |   |
| 32 | EXTREME MOMENTEN  |   |
|    | 49. q-last over de gehele ligger  |   |
| 33 | 50. Extreme momenten bij puntlasten                                     |   |
| 34 | 51. Gelijkmatig verdeelde belasting over een gedeelte van de ligger     |   |

## E

- |    |  |        |
|----|--|--------|
| 35 | ROUTINEMATIGE BEPALING VAN DWARSKRACHTEN EN MOMENTEN   |        |
|    | 52. Liggers uitsluitend belast door puntlasten   | 7<br>8 |
| 36 | LIGGERS BELAST DOOR PUNTLASTEN EN UITWENDIGE MOMENTEN  |        |
|    | 53. Liggers belast door uitwendige momenten  |        |
|    | 54. Verwisselbaarheid van puntlasten en oplegreacties bij liggers onder<br>verticale belasting |        |
| 37 | 55. Omkeren van de belasting   |        |
| 38 | LIGGERS BELAST DOOR PUNTLASTEN EN GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING                              |        |
|    | 56. Puntlasten en gelijkmatig verdeelde belasting  |        |
| 39 | 57. Variant voor de bepaling van de momenten   |        |
| 40 | LIGGERS BELAST DOOR GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING  |        |
|    | 58. Tekenen van momentenlijnen bij liggers onder gelijkmatig verdeelde<br>belasting            |        |
| 41 | 59. Liggers met overstekken onder constante gelijkmatig verdeelde belasting                    |        |

## F

42	SUPERPONEREN	
	60. Superpositie	8
43	61. Superpositie bij momenten van gelijk teken	
44	SUPERPOSITIE I	
	62. Puntlasten en gelijkmatig verdeelde belasting	
	63. Superpositie bij momenten van ongelijk teken	
45	64. Gelijkmatig verdeelde belasting en tegengesteld gerichte puntlast	
46	SUPERPOSITIE I EN II	
	65. Superponeren door het splitsen van de ligger in een aantal moten	
47	66. Superponeren door het splitsen van de belasting bij een ligger met	overstek
48	MAXIMUM- EN MINIMUM MOMENTENLIJNEN	
	67. Variërende plaats van de puntlast	
49	68. Maximum en minimum momentenlijnen onder gelijkmatig verdeelde belasting	
	69. Maximum en minimum momentenlijnen bij een ligger met overstekken	
50	SUPERPOSITIE III	
	70. Superponeren door het verplaatsen van de opleggingen	
51	OPTIMALISEREN	
	71. Optimaliseren, grafische methode	
52	72. Optimaliseren, analytische methode	

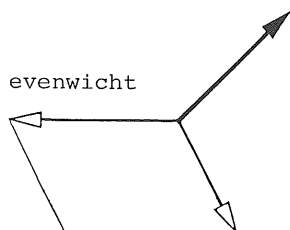
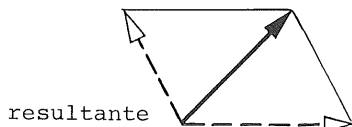
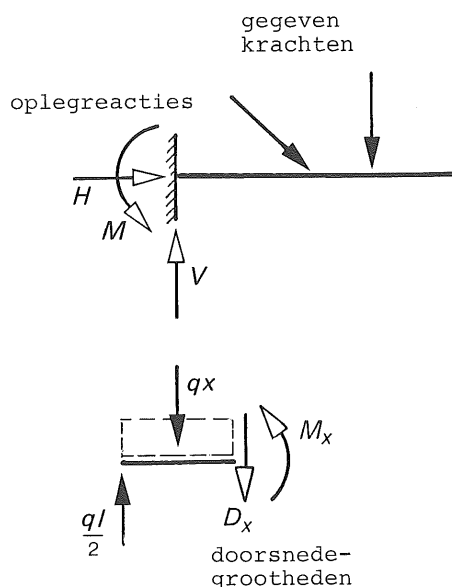
## G

53	LIGGERS MET PENDELSTIJLEN	
	73. N-, D- en M-lijn voor een ligger met pendelstijlen	7 8
54	LIGGERS EN KOLOMMEN MET DWARSSTAVEN	
	74. Kolom met dwarsstaaf; puntlast op één overstek	
55	75. Tegengesteld gerichte puntlasten op de overstekken	
56	76. Gelijk gerichte puntlasten op beide overstekken	
	77. Ligger op twee steunpunten met L-vormige dwarsstaaf	
57	78. Ingeklemd ligger met L-vormige dwarsstaaf	
58	79. Twee aaneensluitende staven onder een willekeurige hoek	
59	80. Algemene regels voor de berekening van liggers met dwarsstaven	
60	DOORGAANDE LIGGERS MET SCHARNIEREN	
	81. Aanpak van de berekening	
61	82. Berekening door splitsing in een aantal statisch bepaalde liggers	
62	83. Analytische wijze van oplossen	
63	84. Voorbeeld van een analytische oplossing	
64	85. Doorgaande liggers met scharnieren onder gelijkmatig verdeelde belasting	

## H

65	KRACHTSWERKING IN KABELS	
	86. Kabel belast door een aantal puntlasten	
66	KOORD BELAST DOOR UITWENDIGE KRACHTEN	13
	87. Bepaling van de trekkrachten in het koord	
67	88. Poolfiguur en stangenveelhoek	
68	89. Vorm van het koord gegeven	
69	90. Werklijn en grootte van de krachten gegeven	
70	91. Krachten aan het koord gefixeerd	
71	SAMENSTELLEN EN ONTBINDEN VAN KRACHTEN	
	92. Bepaling van de resultante van een aantal krachten	
72	93. Bepaling van de resultante van een aantal evenwijdige krachten	
73	94. Ontbinden van een kracht in twee evenwijdige krachten	
74	OPLEGREACTIES BIJ LIGGERS OP TWEE STEUNPUNTEN	
	95. Oplegreacties bij een ligger op twee steunpunten	
75	96. Oplegreacties bij een ligger met een puntlast op het overstek	
76	REACTIEKRACHTEN BIJ EEN KOORD EN EEN LIGGER	
	97. Relatie tussen reactiekrachten bij een koord en oplegreacties bij een ligger	
77	98. Koord door twee gegeven ophangpunten	
78	MOMENTENLIJNEN BIJ LIGGERS	stangenveelhoek
	99. Het bepalen van het statisch moment in een snede m.b.v. poolfiguur en	
79	100. Grafische bepaling van de momentenlijn bij een ligger op twee steunpunten	
80	101. Ligger met nog niet vastgelegde plaats van de opleggingen	
81	102. Liggers onder gelijkmatig verdeelde belasting	
	103. Liggers belast door gelijkmatig verdeelde belasting en puntlasten	
82	KRACHTSWERKING IN KABELS EN LIGGERS	
	104. Vergelijking van de krachtswerking in kabels en liggers	





## TOELICHTING

Indien drie krachten zijn aangegeven met  $F$ ,  $F'$  en  $F''$ , dan hebben de krachten dezelfde grootte en richting met de volgende betekenis:

$F$  = oorspronkelijke kracht.

$F'$  = oorspronkelijke kracht verplaatst langs zijn werklijn.

$F''$  = oorspronkelijke kracht verplaatst evenwijdig aan zichzelf naar een punt buiten zijn werklijn.

De witte en zwarte pijlen bij de kracht- en momentvectoren zijn in eerste instantie bedoeld voor meer overzichtelijkheid. In het algemeen worden de bekende krachten en momenten aangegeven met zwarte pijlen en de onbekende met witte pijlen. Bij het begin van een vraagstuk zullen de oplegreacties daarom veelal met witte pijlen zijn aangegeven en zodra de numerieke waarden zijn berekend, met zwarte pijlen. Indien doorsnede grootheden moeten worden berekend, zullen deze vrijwel altijd met witte pijlen worden aangegeven.

Indien twee krachten zijn gegeven en in dezelfde tekening ook hun resultante - of omgekeerd een kracht en zijn ontbondenen in twee onderling loodrechte richtingen - dan is de ene kracht gestippeld en heeft een witte pijl en zijn de andere twee getrokken en hebben zwarte pijlen, of juist omgekeerd.

Indien twee krachten zijn gegeven en een derde, die daar evenwicht mee maakt, dan zijn nu alle lijnen getrokken, maar heeft de ene kracht weer een witte pijl en de andere elk een zwarte pijl of juist weer omgekeerd.

Bij de gebruikte schrijfmachineletter is er geen onderscheid tussen het cijfer 1 en de letter l. Bij formules waar misverstanden kunnen ontstaan omdat zowel de overspanning 1 als het cijfer één er in voorkomen, is voor het cijfer een ander type gebruikt:

1 = overspanning (zie bijv. 46.)

1 = cijfer één

5\*

In enkele onderdelen wordt iets dieper op de stof ingegaan dan direct voor het tentamen noodzakelijk is. Dit is aangegeven met een zwart sterretje bij het figuurnummer.

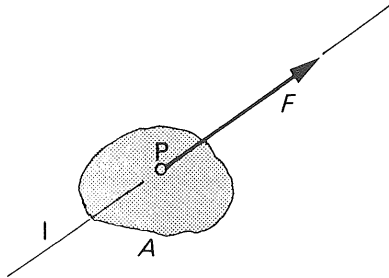
F I

In de figuren zijn alle grootheden met een cursieve letter aangegeven.

A I

Indien rechte letters worden gebruikt heeft dit uitsluitend betrekking op punten of lijnen.

1

1. Kracht

Een kracht is een vector, hij bezit een grootte en een richting en wordt meestal door een pijl aangegeven.

$F$  = kracht (Force)

$l$  = werklijn van de kracht (richting)

$A$  = lichaam waarop de kracht werkt

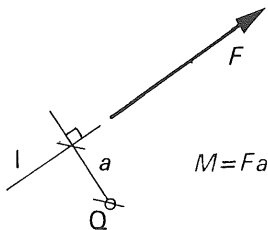
$P$  = aangrijpingspunt van de kracht

Verplaatsing van een kracht langs zijn werklijn:

wel toelaatbaar : voor het bepalen van het evenwicht van een lichaam.

niet toelaatbaar: voor het bepalen van de krachtsverdeling en de vervormingen van een lichaam.

2

2. Moment

Het (statisch) moment van een kracht ten opzichte van een willekeurig punt  $Q$  is gelijk aan het product:

$$M = F \cdot a \quad (\text{Moment} = \text{kracht} \times \text{arm})$$

$M$  = statisch moment

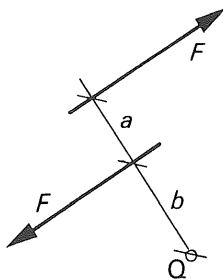
$a$  = afstand van het punt  $Q$  tot de werklijn van de kracht  $F$

Teken van het moment:

rechtsdraaiend (clockwise) : positief

linksdraaiend (counterclockwise) : negatief

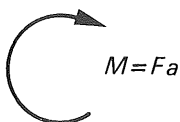
3

3. Koppel

Twee evenwijdige krachten die even groot zijn maar tegengesteld gericht, vormen een koppel. Het moment van een koppel ten opzichte van een willekeurig punt  $Q$  is alleen afhankelijk van de grootte van de krachten  $F$  en de arm  $a$  van het koppel (onderlinge afstand van de krachten).

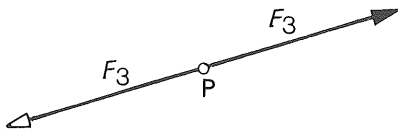
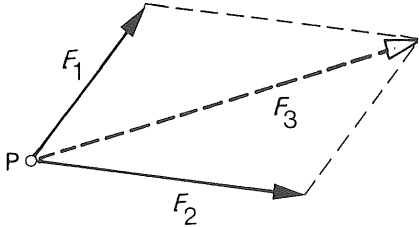
$$M = +F \cdot (a + b) - F \cdot b = F \cdot a$$

Dit betekent dat een koppel volkomen willekeurig in het platte vlak kan worden verplaatst en verdraaid zonder dat de uitwerking van het koppel enige verandering ondergaat.



Het koppel wordt symbolisch aangegeven door een gebogen pijl die dezelfde draairichting heeft als het koppel.

4



4. Parallellogram van krachten

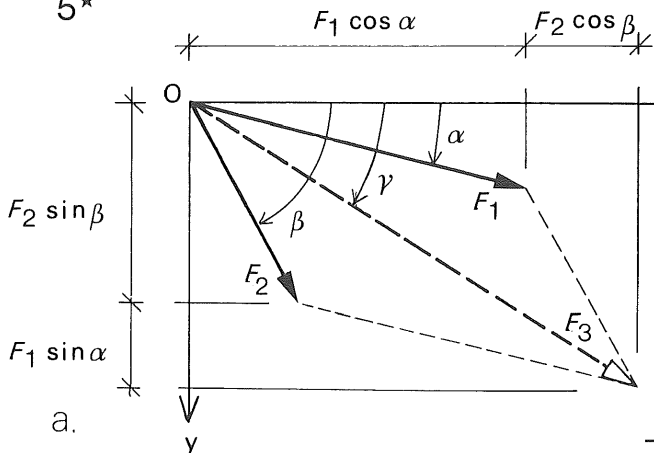
Voor het samenstellen van twee krachten die door één punt gaan, kan gebruik worden gemaakt van het parallellogram van krachten volgens de figuur. Dit betekent dat de krachten  $F_1$  en  $F_2$  kunnen worden vervangen door een derde kracht  $F_3$  die dezelfde uitwerking heeft als de krachten  $F_1$  en  $F_2$  tezamen. Men noemt  $F_3$  de resultante van  $F_1$  en  $F_2$ .

Bijzonder geval

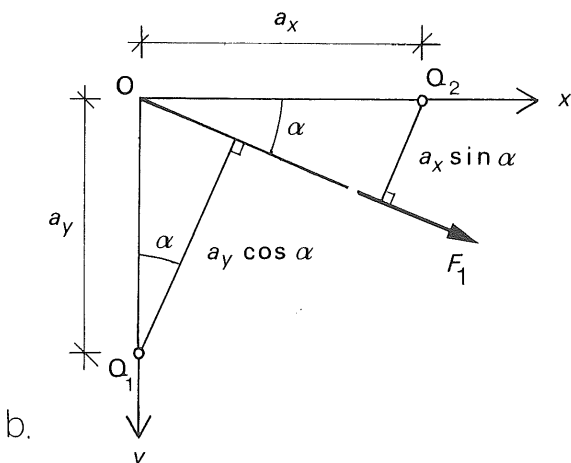
Twee gelijke maar tegengesteld gerichte krachten in een punt P hebben een resultante die gelijk is aan nul; de krachten maken evenwicht met elkaar.

Mathematische controle: de som van de momenten van  $F_1$  en  $F_2$  ten opzichte van elk willekeurig punt Q moet even groot zijn als het moment van  $F_3$  ten opzichte van dat punt.

5\*



a.



b.

5. Analytische uitwerking

- Men kiest het snijpunt van de krachten  $F_1$  en  $F_2$  als de oorsprong van een rechthoekig assenkruis x-y. De richtingen van  $F_1$  en  $F_2$  worden bepaald door de hoeken  $\alpha$  en  $\beta$ ; de richting van de resultante  $F_3$  wordt vastgelegd door de hoek  $\gamma$ .
- Grootte en richting van  $F_3$  worden bepaald door om drie punten het statisch moment op te maken. In schets b. zijn hiervoor de punten O,  $Q_1$  en  $Q_2$  gekozen. De 'arm' van het moment is alleen maar voor  $F_1$  aangegeven.

- Moment om O:

$$F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 = F_3 \cdot a \quad \rightarrow \quad a = 0$$

dat wil zeggen,  $F_3$  moet door het snijpunt van  $F_1$  en  $F_2$  gaan.

- Moment om een willekeurig punt op de y-as: ( $Q_1$ )

$$+F_1 \cdot a_y \cos \alpha + F_2 \cdot a_y \cos \beta = F_3 \cdot a_y \cos \gamma$$

$$F_3 \cos \gamma = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta \quad \dots (1)$$

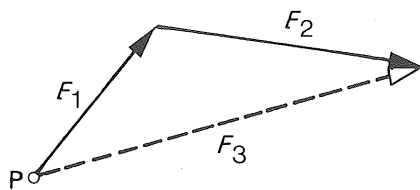
- Moment om een willekeurig punt op de x-as: ( $Q_2$ )

$$+F_1 \cdot a_x \sin \alpha + F_2 \cdot a_x \sin \beta = F_3 \cdot a_x \sin \gamma$$

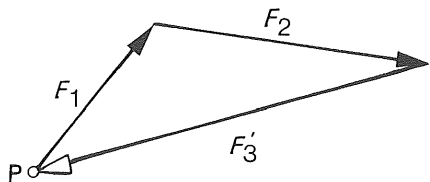
$$F_3 \sin \gamma = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta \quad \dots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dat de som van de projecties van  $F_1$  en  $F_2$  op x- en y-as gelijk is aan de projectie van  $F_3$  op deze assen, met andere woorden: het eindpunt van  $F_3$  valt samen met het getekende parallellogram van krachten.

6



Resultante:  $\underline{F}_3 = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$



Evenwicht:  $\underline{F}_3' = -(\underline{F}_1 + \underline{F}_2)$

### 6. Krachtendriehoek

Voor het bepalen van de resultante van  $F_1$  en  $F_2$  heeft men maar een gedeelte van het parallellogram van krachten te tekenen; men plaatst de krachten  $F_1$  en  $F_2$  in richting en grootte achter elkaar in een krachtdriehoek.

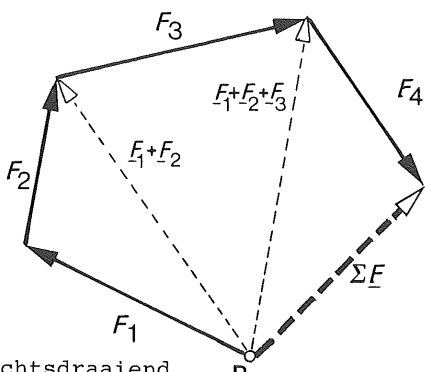
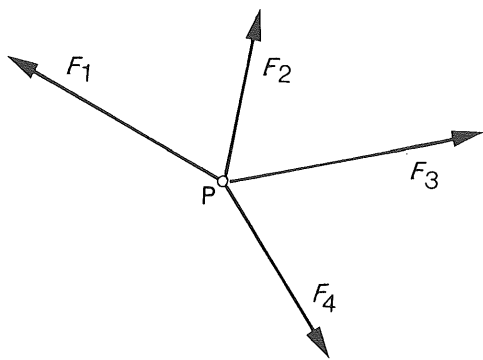
Op deze wijze heeft men de krachten vectorieel opgeteld. Om aan te geven dat men met vectoren werkt (die zijn bepaald door een grootte en een richting) kan een streepje onder het betreffende symbool worden geplaatst ( $\underline{F}_3 = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$ ).

De kracht die evenwicht maakt met  $F_3$  is dan even groot maar tegengesteld gericht.

Resultante: de vector die de resultante van twee krachten voorstelt loopt van het beginpunt van de eerste kracht naar het eindpunt van de tweede kracht.

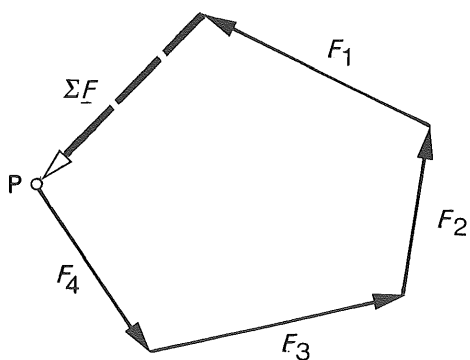
Evenwicht: de vector die evenwicht maakt met twee krachten loopt van het eindpunt van de tweede kracht naar het beginpunt van de eerste kracht; de krachtdriehoek is gesloten.

7



Rechtsdraaiend  
uitgezet

Resultante



Linksdraaiend  
uitgezet

Evenwicht

### 7. Krachtenveelhoek

Indien een aantal krachten door één punt gaan, kan de resultante worden bepaald door de krachten achter elkaar in richting en grootte uit te zetten. De volgorde is hierbij willekeurig, maar om vergissingen te voorkomen zal men de krachten bij voorkeur in een links- of rechtsdraaiende volgorde uitzetten.

In dit procédé wordt de som van de eerste twee vectoren in principe opgeteld bij de derde vector, deze som weer bij de vierde vector enz. Deze tussenresultaten zijn gestippeld in de figuur aangegeven, blijkbaar kan men ze net zo goed weglaten.

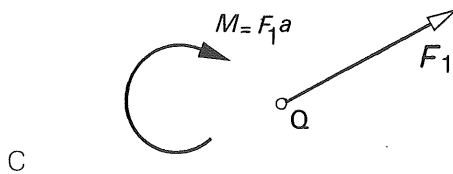
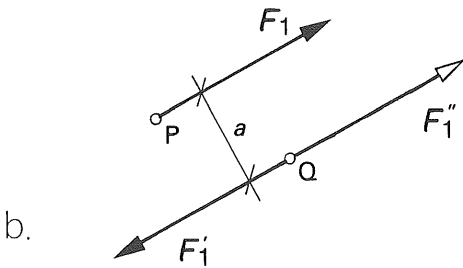
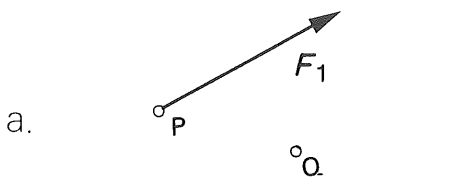
Evenals bij de krachtdriehoek geldt weer;

Resultante: vector van het beginpunt van de eerste kracht naar het eindpunt van de laatste kracht.

Evenwicht: vector van het eindpunt van de laatste kracht naar het beginpunt van de eerste kracht.

Indien alle krachten evenwijdig zijn kunnen ze weer gewoon algebraïsch worden opgeteld.

8



8. Verplaatsen van een kracht

I Het verplaatsen langs een werklijn levert in het algemeen geen problemen, zie 1.

II Het verplaatsen evenwijdig aan zichzelf naar een punt buiten de werklijn is mogelijk door het invoeren van een koppel.

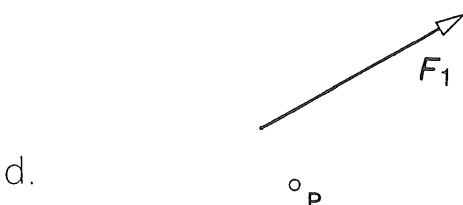
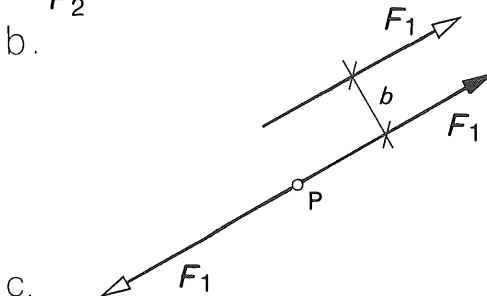
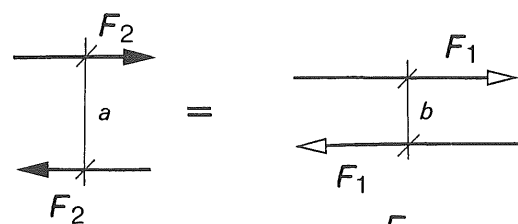
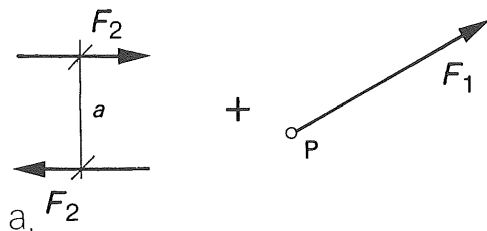
a. Gevraagd: de kracht  $F_1$  moet van punt P worden verplaatst naar een punt Q waarbij richting en grootte van de kracht onveranderd moeten blijven terwijl ook het effect hetzelfde moet blijven als voor de verplaatsing.

b. Oplossing: Men brengt in punt Q twee gelijke en tegengesteld gerichte krachten  $F_1$  aan, (beide evenwijdig aan  $F_1$ ). Aangezien deze krachten evenwicht met elkaar maken is er dus niets veranderd.

c. De kracht  $F_1''$  (met de witte pijl) wordt nu beschouwd als de verplaatste kracht  $F_1$  terwijl de andere twee krachten tezamen een koppel vormen ter grootte  $M = F_1 a$ .

NB Het nieuw ingevoerde koppel heeft dezelfde draairichting als de oorspronkelijke kracht ten opzichte van het punt Q.

9



9. Samenstellen van een kracht en een koppel

(omgekeerde bewerking van 8.)

a. Gegeven een kracht  $F_1$  en een koppel met een moment  $M = F_2 \cdot a$ .

Gevraagd de kracht en het koppel te vervangen door één resulterende kracht.

b. Het koppel wordt vervangen door een ander koppel met hetzelfde moment maar met krachten die gelijk zijn aan de gegeven kracht  $F_1$

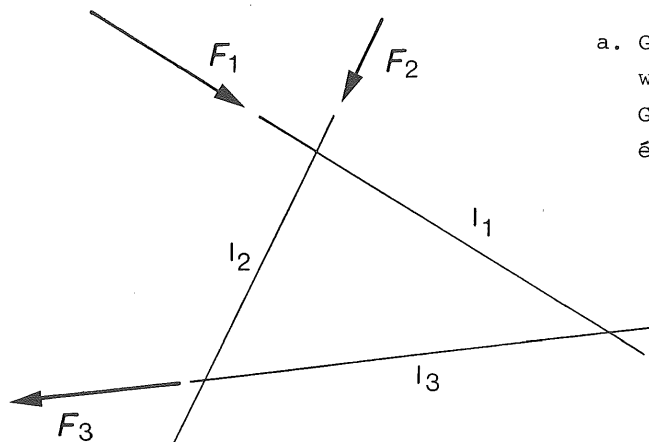
Uit  $F_2 \cdot a = F_1 \cdot b$  volgt  $b = \frac{F_2}{F_1} a$

c. Dit nieuwe koppel kan willekeurig in het platte vlak worden aangebracht. We verplaatsen en verdraaien het koppel nu zo dat één van beide krachten van het koppel evenwicht maakt met de oorspronkelijke kracht  $F_1$ .

d. De enige resterende kracht is dan de andere kracht van het koppel.

10

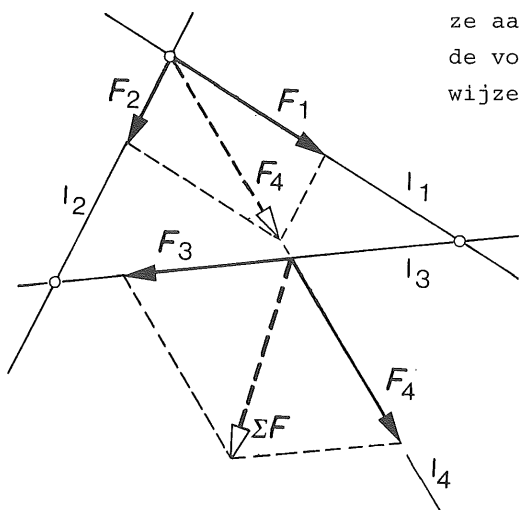
10. Grafische methode



a. Gegeven: drie krachten  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  en hun werklijnen  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ .  
Gevraagd: stel deze krachten samen tot één kracht.

a.

b. Kies twee willekeurige krachten en verplaats ze naar het snijpunt van hun werklijnen, bijv.  $F_1$  en  $F_2$ . Bepaal de resultante met behulp van het parallelogram van krachten volgens 4. Verplaatst deze resultante langs haar werklijn tot ze aangrijpt in het snijpunt van deze werklijn met de volgende kracht. Construeer op overeenkomstige wijze de resultante enz.



b.

Voorbeeld:

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{F}_4$$

Verplaats  $\underline{F}_4$  langs zijn werklijn tot zijn beginpunt op  $l_3$  ligt ( $\underline{F}'_4$ ).

$$\underline{F}_3 + \underline{F}'_4 = \underline{\Sigma F}$$

Indien de krachten evenwijdig zijn of bijna evenwijdig kan beter van een andere grafische methode gebruik worden gemaakt (poolfiguur en stangenveelhoek, zie 92. en 93.).

Voor uitsluitend evenwijdige krachten wordt in 12. een analytische oplossing gegeven.

11

11a. Analytisch grafische methode

Men verplaatst alle krachten naar een willekeurig punt Q en bepaalt de daartoe benodigde koppels met hun teken:

$$\Sigma M = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 + \dots$$

of in een meer algemene schrijfwijze:

$$\Sigma M = \Sigma F a$$

De resultante van alle krachten kan worden bepaald met behulp van een krachtenveelhoek volgens 7. Er is dan één resulterende kracht  $\Sigma F''$  en één resulterend koppel  $\Sigma M$ . Deze twee kunnen worden samengesteld tot één resulterende kracht  $\Sigma F$  volgens 9.

Voorbeeld:

$F_1 = 4,0 \text{ kN}$	$a_1 = 2,0 \text{ m}$
$F_2 = 2,1 \text{ kN}$	$a_2 = 4,0 \text{ m}$
$F_3 = 3,8 \text{ kN}$	$a_3 = 4,6 \text{ m}$

Punt Q is willekeurig gekozen, de afstanden  $a_1, a_2, a_3$  volgen door opmeten. De drie krachten worden naar Q verplaatst en met een krachtenveelhoek samengesteld. In de figuur is alleen de krachtenveelhoek getekend. De grootte van de resultante  $\Sigma F''$  wordt door opmeten uit de tekening bepaald, men vindt  $\Sigma F'' = 4,5 \text{ kN}$ .

Door dit verplaatsen zijn de volgende koppels ontstaan:

$$\begin{aligned} \Sigma M &= +F_1 a_1 = 4,0 \cdot 2,0 = + 8,0 \text{ kNm} \\ &+ F_2 a_2 = 2,1 \cdot 4,0 = + 8,4 \\ &+ F_3 a_3 = 3,8 \cdot 4,6 = + 17,5 \\ \Sigma M &= 33,9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Dit koppel  $\Sigma M$  wordt vervangen door een koppel  $(\Sigma F'') \cdot a$  zodat a volgt uit:

$$a = \frac{\Sigma M}{\Sigma F''} = \frac{33,9}{4,5} = 7,5 \text{ m}$$

Dit rechtsdraaiende koppel wordt nu zodanig uitgezet dat een van beide krachten van het koppel de kracht  $\Sigma F''$  opheft. De gezochte resultante  $\Sigma F$  ligt dan op een afstand  $a = 7,5 \text{ m}$  rechts van  $\Sigma F''$ .

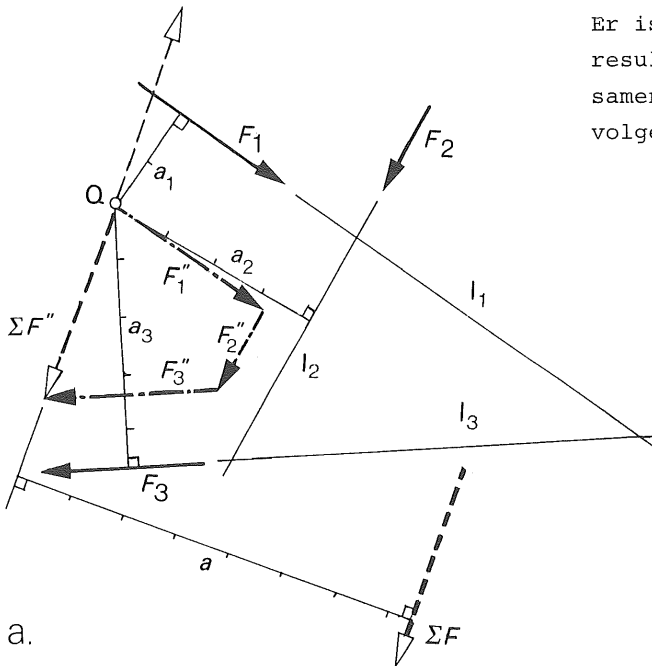
11b. Volledig analytische methode

Eerst worden alle krachten F in x- en y-richting ontbonden volgens 14a. of 14b.

Daarna worden de krachten weer verplaatst naar een willekeurig punt Q en worden de daartoe benodigde koppels berekend.

Op deze wijze kan men de x- en y-component van de kracht elk op algebraïsche wijze bepalen terwijl ook het opmeten van de afstanden a wat gemakkelijker verloopt.

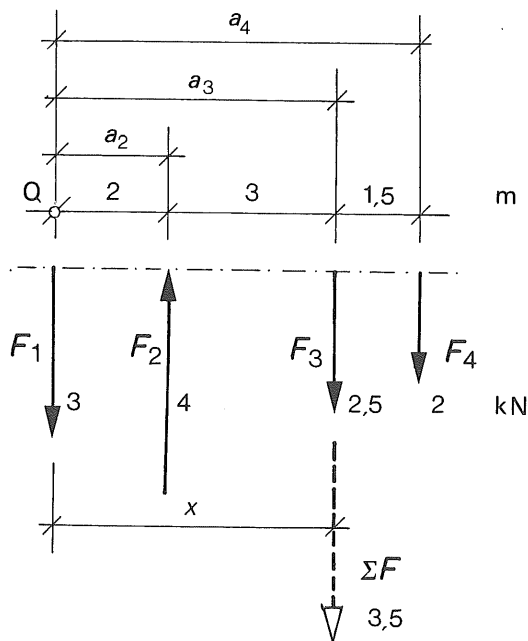
zelfde voorbeeld als in 10.



Men zou voor punt Q bijv. het zwaartepunt van het lichaam kunnen kiezen waar de drie krachten op aangrijpen. Om zo weinig mogelijk te rekenen kan men punt Q het beste in het snijpunt van twee werklijnen kiezen.



12

12. Samenstellen van evenwijdige krachten

Zowel uit 4. als uit 7. volgt dat de resultante van een aantal evenwijdige krachten gelijk is aan de algebraïsche som van deze krachten

$$\Sigma F = \Sigma F$$

waarbij de resultante uiteraard evenwijdig blijft aan de oorspronkelijke krachten.

De plaats van de resultante kan weer worden bepaald door het statisch moment op te maken ten opzichte van een willekeurig gekozen punt Q.

$$\Sigma F a = x \cdot \Sigma F$$

Voor praktische toepassingen tekent men de krachten in richting en grootte, bepaalt de som en maakt om een van de krachten, bijv. de buitenste het moment op.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= F_1 - F_2 + F_3 + F_4 = \\ &= +3 - 4 + 2,5 + 2 = +3,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Het moment wordt opgemaakt om Q:

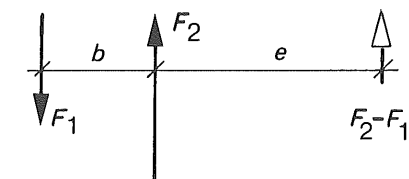
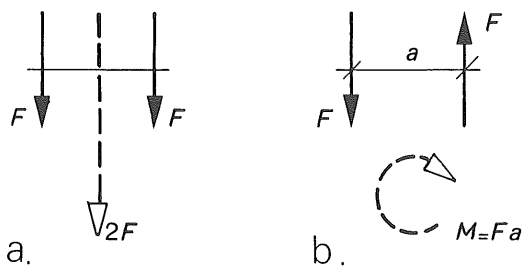
$$\begin{aligned} x \cdot \Sigma F &= -F_2 a_2 + F_3 a_3 + F_4 a_4 = \\ &= -4 \cdot 2 + 2,5 \cdot 5 + 2 \cdot 6,5 = \\ &= -8 + 12,5 + 13 = 17,5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$x = \frac{17,5}{\Sigma F} = \frac{17,5}{3,5} = 5 \text{ m}$$

Geheel toevallig valt de werklijn van de resultante samen met die van de kracht  $F_3$ .

Bijzondere gevallen bij twee evenwijdige krachten

- De krachten zijn even groot en gelijk gericht. De resultante ligt in het midden van beide krachten.
- De krachten zijn even groot en tegengesteld gericht. We hebben te doen met een koppel en het is niet mogelijk dat koppel door één kracht te vervangen.
- De krachten zijn ongelijk van grootte en tegengesteld gericht. De resultante ligt buiten de twee krachten aan de zijde van de grootste kracht en in dezelfde richting.

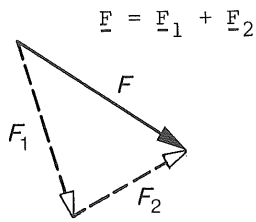


c.

Voor de ligging van de resultante wordt het moment om  $F_2$  opgemaakt.

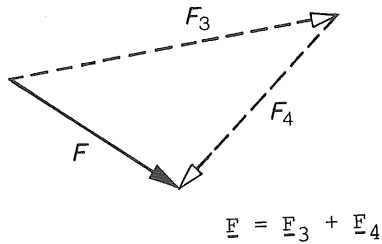
$$\begin{aligned} -F_1 b &= -(F_2 - F_1) e \\ e &= \frac{F_1}{F_2 - F_1} b \end{aligned}$$

13

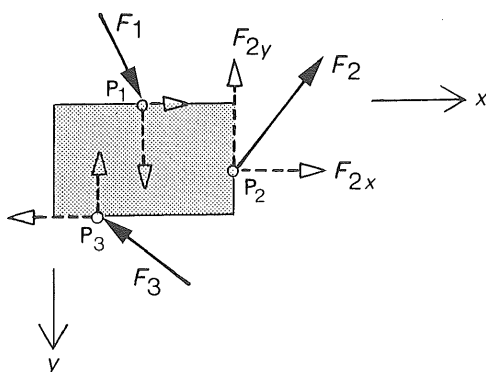


13. Ontbinden in willekeurige richtingen

Elke kracht kan weer worden ontbonden in twee andere krachten met behulp van een krachtendriehoek (resp. een parallelogram van krachten). Het aantal mogelijkheden om een kracht te ontbinden is dus oneindig groot.



14

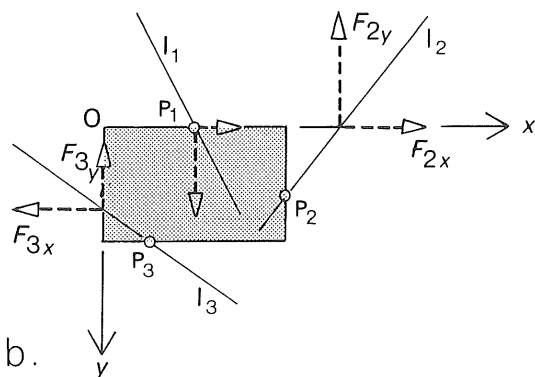


14. Ontbinden in onderling loodrechte richtingen

a. Voor rekenkundige bewerkingen is het dikwijls gemakkelijker om willekeurig gerichte krachten eerst te ontbinden in hun componenten in x- en y-richting en dan met deze componenten  $F_x$  en  $F_y$  verder te werken.

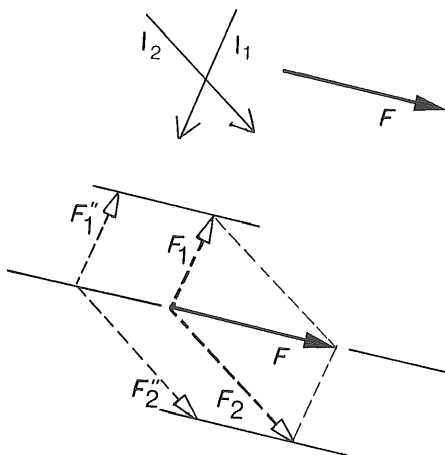
Bij het analytisch samenstellen van krachten zoals onder 11b. kunnen dan de componenten  $F_x$  en  $F_y$  algebraïsch worden opgeteld.

Voor het opmaken van de momenten worden dan de afstanden  $a_x$  en  $a_y$  gebruikt hetgeen het geheel veel eenvoudiger en overzichtelijker maakt.



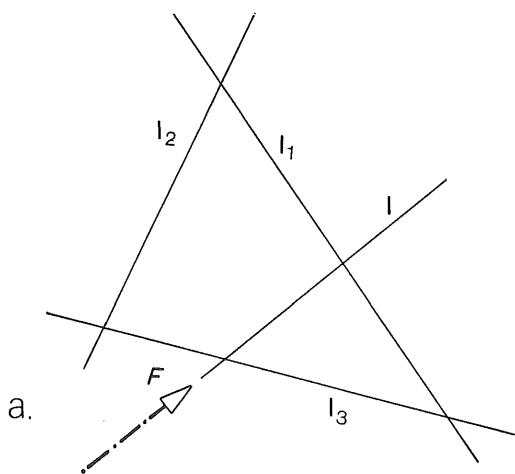
b. In sommige gevallen verdient het aanbeveling alle oorspronkelijke krachten eerst langs hun werklijn te verplaatsen tot ze één van beide coördinaat-assen snijden en dan pas de ontbinding uit te voeren. Dit is vooral gunstig als men het moment van de diverse componenten om de oorsprong O opmaakt. Hierbij valt dan steeds één van beide componenten uit de vergelijking weg.

15

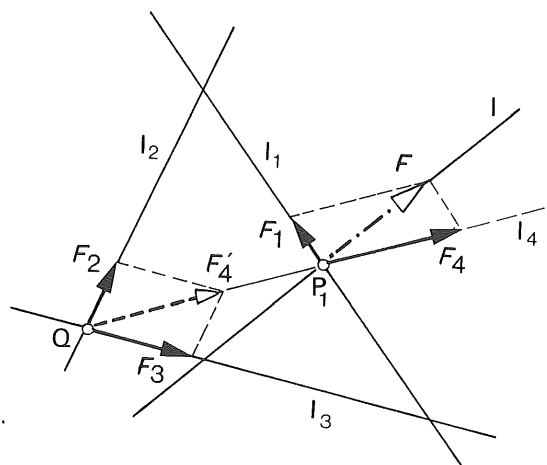
15. Ontbinden in twee gegeven richtingen

Indien een kracht moet worden ontbonden in twee gegeven richtingen dan liggen zowel de richting als de grootte van de krachten eenduidig vast. De werklijnen van de ontbondenen moeten door hetzelfde (willekeurig gekozen) punt van de oorspronkelijke werklijn gaan (zie 4. 5. of 6.)

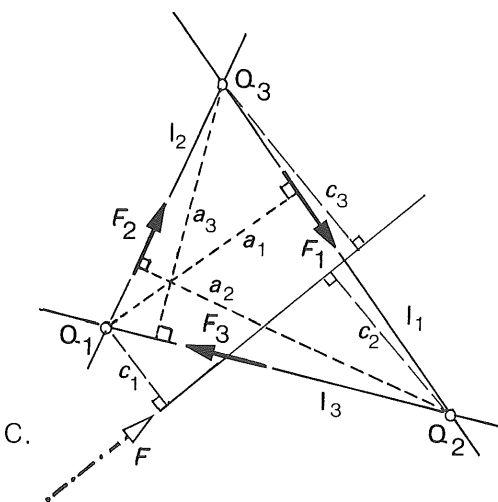
16



a.



b.



c.

16. Ontbinden langs drie gegeven werklijnen

- a. Gegeven: de kracht F langs de werklijn l.  
Gevraagd: ontbind F langs  $l_1$ ,  $l_2$  en  $l_3$ .

b. Grafische methode

De kracht F wordt verplaatst langs zijn werklijn tot hij één van de drie gegeven werklijnen snijdt, bijv.  $l_1$  in punt  $P_1$ . Met behulp van het parallelogram van krachten wordt F ontbonden langs  $l_1$  en de verbindingslijn van  $P_1$  met het snijpunt Q van de werklijnen  $l_2$  en  $l_3$ . De ontbondene  $F_4$  wordt nu langs zijn werklijn  $l_4$  verplaatst naar Q en daar weer ontbonden langs de werklijnen  $l_2$  en  $l_3$ .

c. Analytische methode

Neem voor de ontbondenen  $F_1$ ,  $F_2$  en  $F_3$  een willekeurige positieve richting aan en schets deze krachten in de figuur. Maak achtereenvolgens om elk van de drie snijpunten van  $l_1$ ,  $l_2$  en  $l_3$  het statisch moment op van de drie componenten en de oorspronkelijke kracht F. Volgens 4. moet dan gelden:  $F \cdot c = \sum F_i a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Aangezien steeds twee van de drie gezochte componenten door zo'n snijpunt gaan, kan de betreffende component rechtstreeks in de bekende kracht worden uitgedrukt.

Voor praktische gevallen kunnen de afstanden a en c uit de figuur worden opgemeten.

Momenten achtereenvolgens opgemaakt om  $Q_1$ ,  $Q_2$  en  $Q_3$ .

$$Q_1: + F_1 a_1 = - F c_1$$

$$Q_2: + F_2 a_2 = + F c_2$$

$$Q_3: + F_3 a_3 = - F c_3$$

17

17. Wet van Newton

De kracht die op een lichaam werkt volgt uit de wet van Newton:

$$F = m \cdot a \quad (\text{kracht} = \text{massa} \times \text{versnelling})$$

F stelt hierbij de resultante voor van alle krachten die op het lichaam met massa m werken, dus eigenlijk geldt:

$$\Sigma F = m \cdot a$$

Als het lichaam in rust is volgt:

$v = 0$ ; de snelheid is gelijk aan nul, en dus ook

$a = 0$ ; de versnelling is gelijk aan nul.

Hieruit volgt  $\Sigma F = 0$ ; alle krachten maken evenwicht met elkaar.

18

18. Ondersteuning

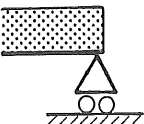
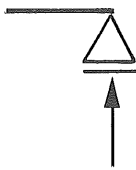
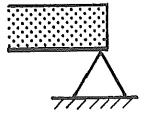
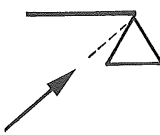
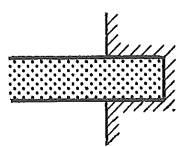
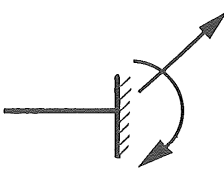
Bij draagconstructies zijn een aantal uitwendige krachten bekend:

- eigen gewicht
  - rustende belasting
  - nuttige belasting
  - windkrachten
- |   |                |
|---|----------------|
| } | te berekenen   |
| } | te bepalen uit |
| } | voorschriften  |

Om de krachtswerking in een constructie te kunnen bepalen moeten allereerst de krachten worden bepaald die evenwicht maken met de bovengenoemde krachten. Deze worden geleverd door de ondersteuning van de draagconstructie, zie 21.

In principe wordt in de (elementaire) toegepaste mechanica uitgegaan van drie geïdealiseerde typen ondersteuning:

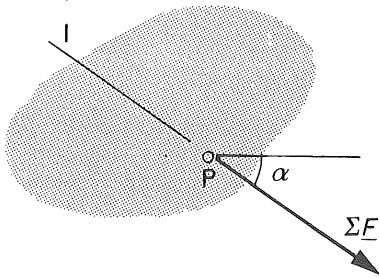
Schema's

 <p style="text-align: center;">roloplegging</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- een roloplegging (kan een kracht in één richting leveren, loodrecht op de baan van de rol; hierbij wordt aangenomen dat de rol ook trekkrachten kan overbrengen).</li> </ul>
 <p style="text-align: center;">scharnieroplegging</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- een scharnier (kan een kracht in elke willekeurige richting leveren, die steeds door het scharnierpunt moet gaan).</li> </ul>
 <p style="text-align: center;">inklemming</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- een inklemming (kan een kracht in elke willekeurige richting leveren plus een koppel).</li> </ul>

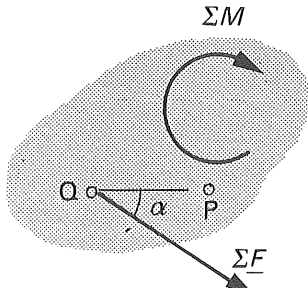
Nadere detaillering in 23.

19

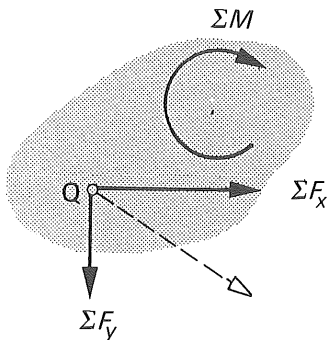
a.



b.



c.

19. Evenwichtsvoorwaarden voor een lichaam

Voor het bepalen van de resultante van een aantal krachten die op een lichaam werken, bestaan twee mogelijkheden:

a. grafisch volgens 10.

Uit de grafische constructie volgt de grootte en richting van de resultante evenals de ligging van de werklijn.

b. analytisch volgens 11.

Bij dit procedé worden alle krachten verplaatst naar één willekeurig punt Q en daar samengesteld tot  $\Sigma \underline{F}$ . Door dit verplaatsen ontstaat een resulterend koppel  $\Sigma M$ .

Uit b. volgt dat voor evenwicht moet gelden:

$$\Sigma \underline{F} = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

c. De resulterende kracht  $\Sigma \underline{F}$  volgens b. is bepaald door grootte en richting, òf wat op hetzelfde neerkomt, door de componenten  $\Sigma F_x$  en  $\Sigma F_y$ .

In de meest algemene vorm moet dus gelden:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M &= 0 \end{aligned} \right\} (3a) \quad \text{ofwel} \quad \left. \begin{aligned} \Sigma H &= 0 \\ \Sigma V &= 0 \\ \Sigma M &= 0 \end{aligned} \right\} (3b)$$

- de som van alle horizontale krachten moet gelijk zijn aan nul.
- de som van alle verticale krachten moet gelijk zijn aan nul.
- de som van de statische momenten - om elk willekeurig gekozen punt - moet gelijk zijn aan nul.

Het moment wordt opgemaakt om punt Q.

Als men voor dit punt Q het zwaartepunt kiest, dan geldt:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ het lichaam zal niet in (een eenparig versnelde) beweging komen}$$

$\Sigma M = 0 \rightarrow$  het lichaam zal niet (om het zwaartepunt) gaan roteren.

20

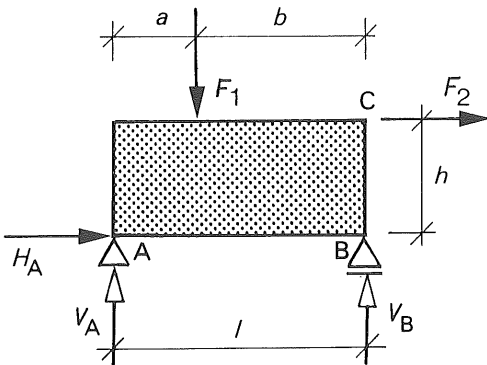
20. Variant voor de evenwichtsvoorwaarden

In plaats van de formules (3a) of (3b) toe te passen, kan men ook het momentenevenwicht opmaken om drie verschillende punten die niet op één rechte lijn mogen zijn gelegen

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_1 &= 0 \\ \Sigma M_2 &= 0 \\ \Sigma M_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3c)$$

De evenwichtsvoorwaarden volgens formule (3a) zijn een bijzonder geval van de algemene formule (3c). Het moment is daar voor de eerste twee gevallen opgemaakt om een punt in het oneindige; punt  $P_1(0, \infty)$  en punt  $P_2(\infty, 0)$ .

21

21. Voorbeelden

Toepassing van de formules (3b) (moment om A).

$$\begin{aligned} \Sigma H = 0 &: +F_2 + H_A = 0 & H_A &= -F_2 \\ \Sigma V = 0 &: +F_1 - V_A - V_B = 0 & V_A + V_B &= +F_1 \\ \Sigma M = 0 &: +F_1 a + F_2 h - V_B l = 0 & V_B &= (F_1 a + F_2 h)/l \end{aligned}$$

zodat:

$$V_B = \frac{a}{l} F_1 + \frac{h}{l} F_2$$

$$V_A = \frac{b}{l} F_1 - \frac{h}{l} F_2$$

Let op: indien de werklijn van een horizontale kracht niet door de oplegpunten gaat, ontstaan hierdoor gelijke en tegengestelde verticale oplegreacties.

Toepassing van de formules (3c) (momenten om A, B en C)

$$\Sigma M_A = 0 : +F_1 a + F_2 h - V_B l = 0 \quad V_B = (F_1 a + F_2 h)/l$$

$$\Sigma M_B = 0 : -F_1 b + F_2 h + V_A l = 0 \quad V_A = (F_1 b - F_2 h)/l$$

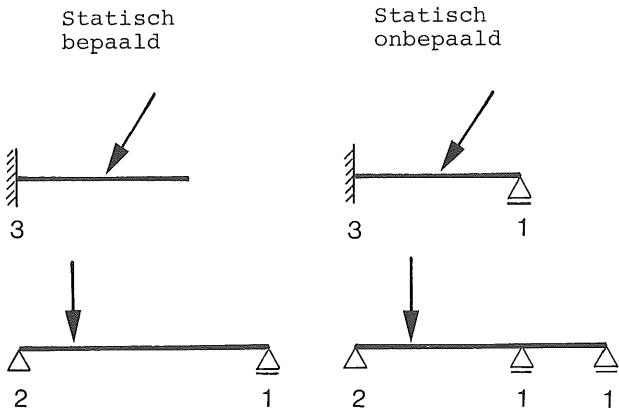
$$\Sigma M_C = 0 : -F_1 b - H_A h + V_A l = 0 \quad H_A h = -F_1 b + V_A l =$$

$$= -F_1 b + F_1 b - F_2 h$$

$$\text{zodat } H_A = -F_2$$

22

22. Statisch bepaald en statisch onbepaald

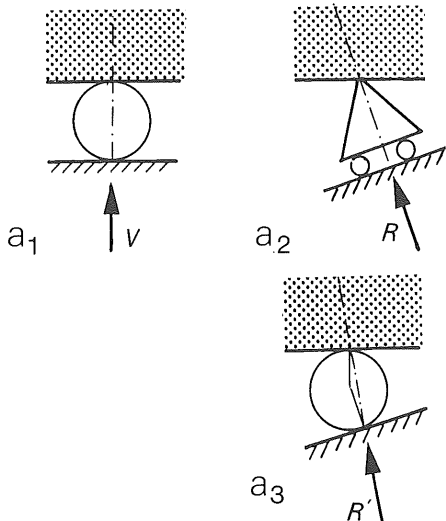


De cijfers geven per oplegging het aantal onbekenden aan; zie 23.

Een constructie is statisch bepaald opgelegd als met behulp van de drie evenwichtsvoorwaarden (3) alle krachten in de ondersteuning, de zgn oplegreacties kunnen worden bepaald. Er mogen dus maar drie onafhankelijke componenten voorkomen, omdat dan drie vergelijkingen met drie onbekenden kunnen worden opgesteld, die i.h.a. gemakkelijk zijn op te lossen. De werkelijke opleggingen worden daartoe in de meeste gevallen wat geïdealiseerd. Een constructie is statisch onbepaald opgelegd als er meer oplegreactiecomponenten zijn dan evenwichtsvergelijkingen. De ontbrekende vergelijkingen moeten dan worden bepaald uit de vervormingen van het lichaam (bijv. dat er geen zakking mag optreden ter plaatse van zo'n extra steunpunt. Het aantal onafhankelijke reactiekrachten dat door een oplegging kan worden overgebracht wordt behandeld in 23.

23

23. Soorten opleggingen



Bij de schematisering van de constructie worden de opleggingen i.h.a. nogal drastisch geschematiseerd tot een drietal ideale opleggingen:

- a. een roloplegging 1 onbekende
- b. een scharnier 2 onbekenden
- c. een volledige inklemming 3 onbekenden

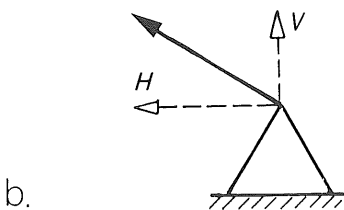
a. Roloplegging (rol)

Er kunnen alleen reactiekrachten worden overgebracht waarvan de werklijn gaat door de aanrakingspunten van de rol met de constructie en met het oplegvlak.

De kracht werkt meestal verticaal; bij hellende vlakken wordt de werklijn i.h.a. loodrecht op de helling van het vlak aangenomen, hoewel hier strikt genomen nog afwijkingen in kunnen optreden (zie fig a<sub>3</sub>).

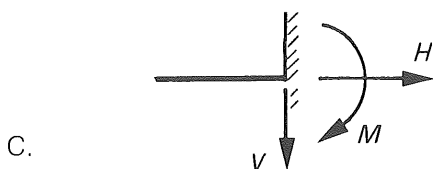
b. Scharnieroplegging (scharnier)

Een scharnier kan een kracht in elke willekeurige richting overbrengen, mits de werklijn van de kracht door het scharnierpunt gaat. Gemakshalve wordt de kracht meestal ontbonden in de verticale component V en de horizontale component H.



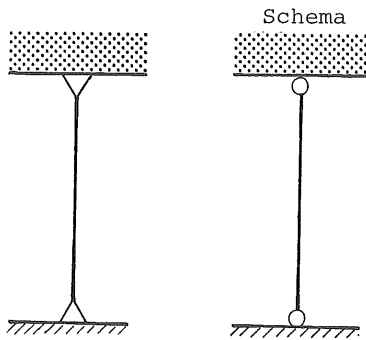
c. Volledige inklemming

Een volledige inklemming kan zowel een willekeurige kracht door het inklemmingspunt overbrengen als een koppel. Er zijn dus drie onbekenden; V, H en M.





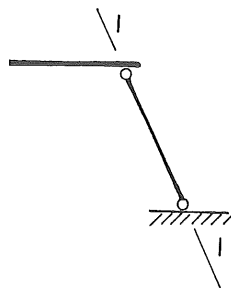
24



24. Pendelstijlen

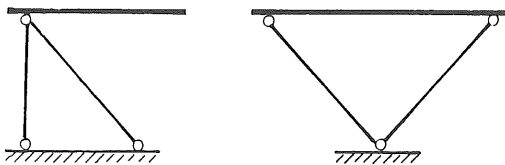
Bij een roloplegging is de richting en het aangrijpingspunt van de reactiekracht eenduidig vastgelegd. Ditzelfde kan ook worden bereikt door een pendelstijl: een staaf die met één scharnier aan de constructie is bevestigd en met het tweede scharnier aan het oplegvlak. De reactiekracht moet dan door beide scharnieren gaan zodat richting en aangrijpingspunt van de reactiekracht vast liggen.

Een pendelstijl kan zowel trek als druk opnemen. Bij een kabel valt de werklijn van de kracht samen met de hartlijn van de (rechte) kabel. Een kabel kan uiteraard alleen trek overbrengen.



a.

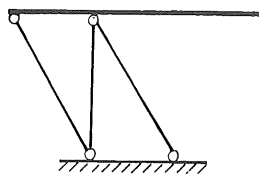
- a. Eén pendelstijl is volledig equivalent met een roloplegging: er wordt een kracht langs een gegeven werklijn overgebracht.
- b. Twee pendelstijlen waarvan de werklijnen elkaar snijden is volledig equivalent met een scharnier: er wordt een kracht door een gegeven punt overgebracht. Dit punt is het snijpunt van de werklijnen, elke willekeurige kracht door dit punt kan immers langs de twee pendelstijlen worden ontbonden.



b<sub>1</sub>

b<sub>2</sub>

- In fig. b<sub>1</sub> ligt het eigenlijke scharnierpunt op de ligger, in fig. b<sub>2</sub> op het oplegvlak.
- c. Met enige goede wil kan men een combinatie van drie pendelstijlen - die niet door één punt mogen gaan - opvatten als een inklemming, zolang de aangrijpingspunten van de pendelstijlen op de ligger niet al te ver uit elkaar liggen, zie ook 26.

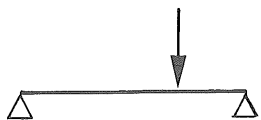


c.

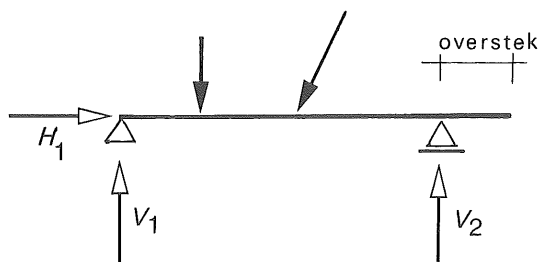
Op overeenkomstige wijze als onder c. kan een volledige inklemming ook worden vervangen door een rol en een scharnier die dicht bij elkaar zijn gelegen, zie 25, fig. b<sub>2</sub> en b<sub>3</sub>.

25

a.



b.



a<sub>1</sub>



a<sub>2</sub>



25. Basisvormen statisch bepaalde liggers

Beperkt men zich tot de opleggingen volgens 23. dan zijn er twee hoofdvormen:

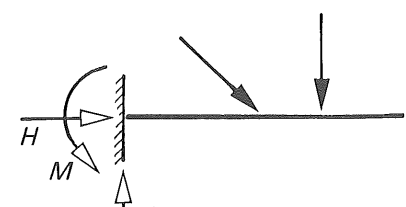
- a. Ligger op twee steunpunten
- b. Ingeklemde ligger

Een statisch bepaalde ligger op twee steunpunten heeft een scharnier en een roloplegging. De ligger mag aan één of beide zijden overstekken. Er zijn drie onbekende reactiekrachten:  $H_1$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ . De oplegreacties kunnen het beste analytisch worden bepaald met behulp van de drie evenwichtsvoorwaarden  $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$ ,  $\Sigma M = 0$ , zie 19.

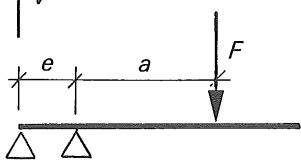
Onjuiste varianten

- a<sub>1</sub> Twee rolopleggingen. Er zijn alleen verticale belastingen mogelijk omdat niet aan het horizontale evenwicht kan worden voldaan.
- a<sub>2</sub> Twee scharnieropleggingen. Er is één reactiekracht te veel, de verdeling van de horizontale reacties over  $H_1$  en  $H_2$  kan niet worden aangegeven. Ten gevolge van vervormingen in de ligger kunnen extra normaalkrachten in de ligger worden opgewekt.

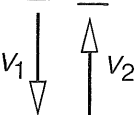
Het probleem is overigens van academische betekenis; indien alleen verticale krachten op de ligger aangrijpen, maakt het voor de berekening niet uit wat men doet.



b<sub>1</sub>



b<sub>2</sub>



- b<sub>1</sub> Een volledig ingeklemde ligger is aan één uiteinde vast verbonden met een stijve ondersteuning, die de drie onbekende reactiekrachten  $H$ ,  $V$  en  $M$  kan leveren. De krachtwerking in de ligger kan desgewenst worden bepaald zonder eerst de oplegreacties te berekenen, dit in tegenstelling tot de ligger op twee steunpunten.

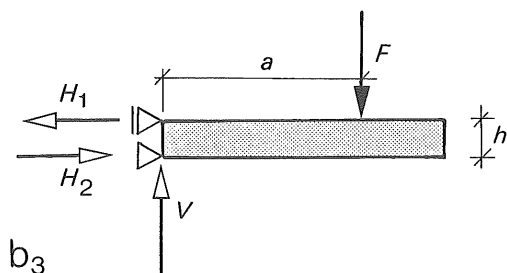
- b<sub>2</sub> De drie benodigde reactiekrachten kunnen ook worden geleverd door een roloplegging en een scharnier op korte afstand van elkaar te plaatsen.

$$V_1 e = Fa \quad V_1 = \frac{a}{e} F \quad V_2 = \frac{a+e}{e} F \quad (H = 0)$$

- b<sub>3</sub> Dit spreekt vooral als men de hoogte van de ligger in beschouwing neemt en de rol en het scharnier aan een zijkant van de ligger plaatst.

$$H_1 = H_2 \quad H_1 h = Fa \quad H_1 = \frac{a}{h} F \quad V = F$$

Let op: de horizontale krachten zijn dus aanmerkelijk groter dan de verticale in dit geval.



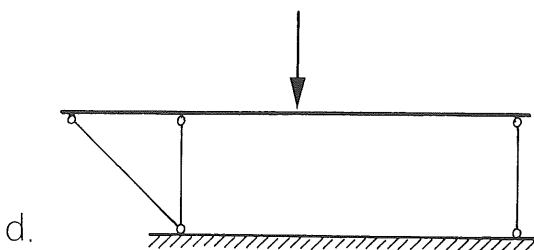
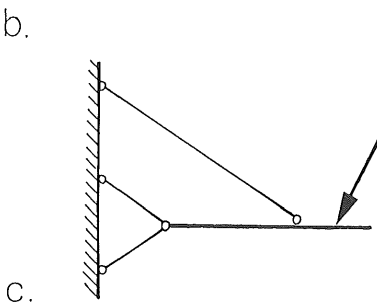
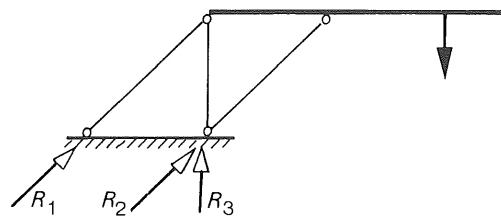
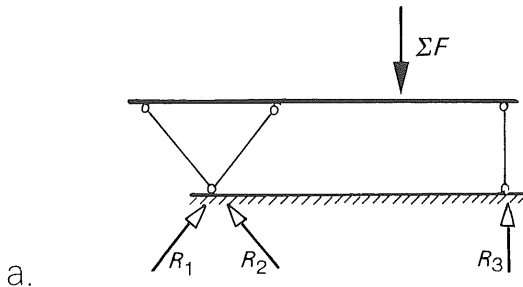
b<sub>3</sub>

26

26. Statisch bepaalde liggers met pendelstijlen

Min of meer equivalente systemen voor een ligger op twee steunpunten of een ingeklemde ligger ontstaan door allerlei combinaties van drie pendelstijlen en/of kabels.

Er zijn drie onbekende reactiekrachten  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . De opstelling van fig. a. heeft het meeste weg van een ligger met een scharnieroplegging en een roloplegging, de opstelling van fig. b. heeft wat meer weg van een ingeklemde ligger. Een scherp onderscheid is niet te maken en is ook niet nodig.



Snelste en meest doorzichtige oplossing:

Bepaal de resultante van alle uitwendige krachten volgens 10. (grafisch) of 11. (analytisch).

Deze resultante moet dan evenwicht maken met de drie reactiekrachten  $R_1$ ,  $R_2$  en  $R_3$ , of wat op hetzelfde neerkomt; de resultante moet worden ontbonden langs de werklijnen van  $l_1$ ,  $l_2$  en  $l_3$  van de drie reactiekrachten.

De beste manier van ontbinden hangt af van de ligging van de werklijnen van de reactiekrachten  $R$  en van de resultante  $\Sigma F$ .

c. Indien deze werklijnen elkaar snijden kan de resultante rechtstreeks worden ontbonden langs deze drie werklijnen volgens 16a. of 16b. Vooral de grafische methode volgens 16b. is dan erg overzichtelijk, zie 27, voorbeeld  $c_1$ .

d. Indien de werklijn van de resulterende kracht en de werklijnen van twee reactiekrachten evenwijdig zijn komt de analytische methode volgens 19. meer in aanmerking (opmaken van de evenwichtsvoorwaarden volgens formule (3)).

Enkele aanwijzingen voor het bepalen van de oplegreacties

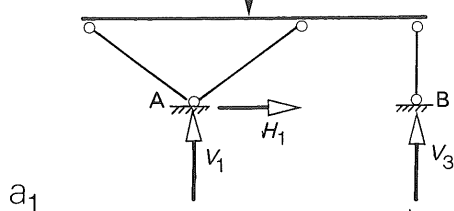
Bij het opstellen van de evenwichtsvergelijkingen kan men op verschillende manieren te werk gaan. Het vereist enige oefening om te zien op welke wijze men het snelste tot een oplossing komt.

Twee algemene wenken:

- Maak het statische moment bij voorkeur op om een punt waar de werklijnen van twee reactiekrachten elkaar snijden.
- Indien alleen verticale krachten op de ligger werken kan in vele gevallen de evenwichtsvoorwaarde  $\Sigma H = 0$  snel uitsluitel geven over de krachten in bepaalde staven.

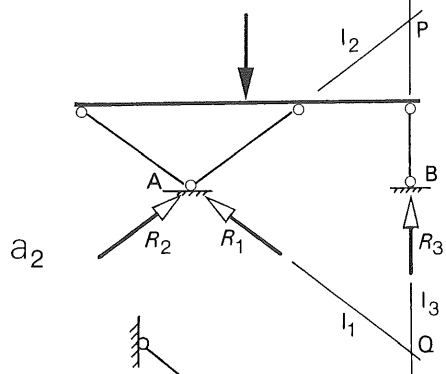
27

## 27. Voorbeelden

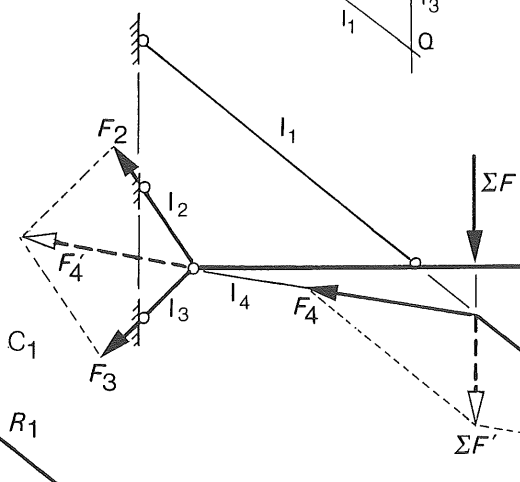
a<sub>1</sub>

a<sub>1</sub> Uit  $\Sigma H = 0$  volgt  $H_1 = 0$ .

Maakt men de statische momenten op om A en B dan vindt men  $V_3$  en  $V_1$  op dezelfde wijze als bij een ligger op twee steunpunten.  $V_1$  kan dan weer worden ontbonden in  $R_1$  en  $R_2$ .

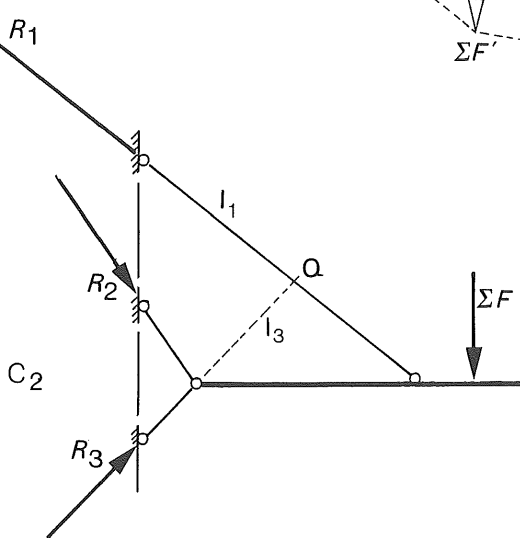
a<sub>2</sub>

a<sub>2</sub> De reactiekrachten  $R_1$ ,  $R_2$  en  $R_3$  kunnen rechtstreeks worden bepaald door achtereenvolgens de statische momenten op te maken om de punten P, Q en A. Afstanden van de drie punten tot de werklijnen van de betreffende krachten opmeten uit de figuur.

c<sub>1</sub>

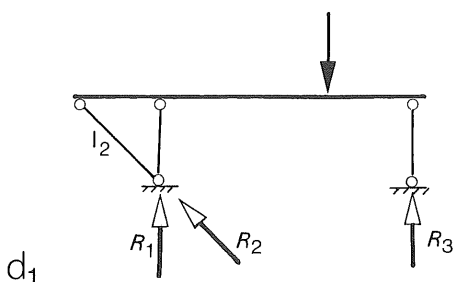
c<sub>1</sub> Grafische methode (zie 16a).

$\Sigma F$  wordt ontbonden langs  $l_1$  en  $l_4$ , de kracht  $F_4$  wordt langs zijn werklijn verplaatst en weer ontbonden langs  $l_2$  en  $l_3$ . De aldus bepaalde krachten  $F_1$ ,  $F_2$  en  $F_3$  hebben dan precies dezelfde uitwerking als  $\Sigma F$ . De reactiekrachten  $R_1$ ,  $R_2$  en  $R_3$  hebben dan dezelfde grootte maar zijn tegengesteld gericht, zie fig. c<sub>2</sub>.

c<sub>2</sub>

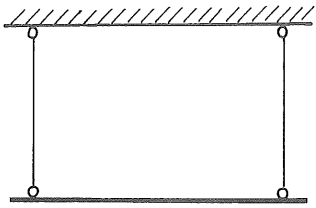
c<sub>2</sub> Analytische controle.

Lijkt de richting of grootte van een reactiekracht onwaarschijnlijk, bijv. druk voor  $R_2$ , controleer zo'n reactie dan rechtstreeks door het statisch moment op te maken om het snijpunt van de werklijnen van de andere twee reactiekrachten (in dit geval dus punt Q, snijpunt van  $l_1$  en  $l_3$ ).

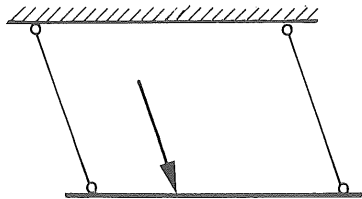
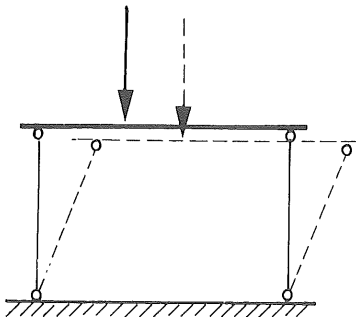
d<sub>1</sub>

d<sub>1</sub> Uit  $\Sigma H = 0$  volgt direct dat  $R_2 = 0$ . De ligger draagt de gehele verticale belasting af via  $R_1$  en  $R_3$ . StAAF  $l_2$  speelt in dit geval alleen een rol voor de stabiliteit en wordt pas werkzaam als er horizontale krachten aangrijpen.

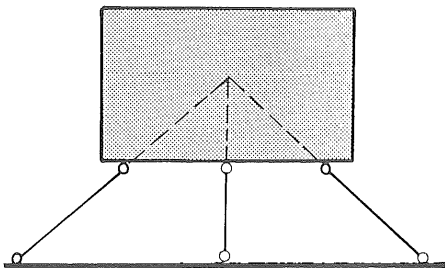
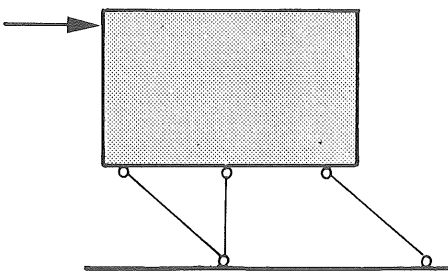
28



a.

a<sub>1</sub>a<sub>2</sub>

Constructie is instabiel

b<sub>1</sub>

Stabiele oplossing door het verplaatsen van één pendelstijl.

### 28. Onjuiste varianten met pendelstijlen

#### a. Twee evenwijdige kabels of pendelstijlen

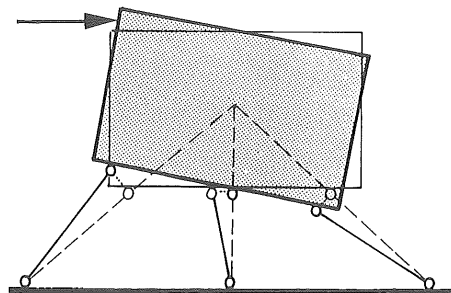
Er is één reactiekracht te weinig, bij horizontale belasting ontstaan twee mogelijkheden:

a<sub>1</sub> Als de ondersteuning op trek worden belast zullen zodanig verplaatsingen optreden dat de pendelstijlen c.q. kabels evenwijdig gaan staan met de werklijn van de resultante.

a<sub>2</sub> Als de ondersteuning op druk worden belast zal de constructie instabiel worden, m.a.w. hij valt om.

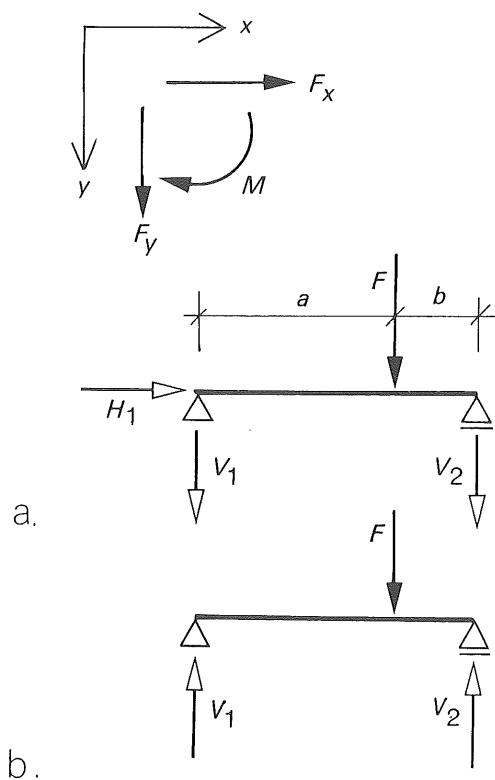
#### b. De drie kabels of pendelstijlen snijden elkaar in een punt

Er is enkel maar evenwicht mogelijk als de belasting ook door dit snijpunt gaat. Maakt men nl het statisch moment op om dit snijpunt dan kunnen de reactiekrachten geen enkel moment leveren. Bij een willekeurige belasting zal de constructie zeer sterk verplaatsen, d.w.z. hij wordt instabiel.

b<sub>2</sub>

c. Een bijzonder geval treedt op bij drie evenwijdige pendelstijlen, het snijpunt ligt dan op oneindig. Men vindt dan overeenkomstige verschijnselen als bij twee evenwijdige pendelstijlen, zie onder a<sub>1</sub> en a<sub>2</sub>. De verdeling van de verticale belasting over de drie pendelstijlen (bij trek in de pendels) volgt dan uit de vervormingen van het lichaam. De constructie is dan statisch onbepaald voor de verticale belasting.

29

29. Teken van de reactiekrachten

In het verticale vlak wordt een x-y-assenkruis aangenomen. Bij strikte tekenafspraken voor het bepalen van het evenwicht worden de componenten  $F_x$  en  $F_y$  van de krachten  $F$  positief gerekend als ze werken in de richting van de positieve assen. Statische momenten worden positief gerekend bij een draaiing van de x-as naar de y-as.

- Wil men deze tekenafspraken ook voor de oplegreacties invoeren, dan moet dit volgens de schets. Bij een verticaal omlaag gerichte belasting blijkt dan uit de evenwichtsvoorwaarden dat meestal zowel  $V_1$  als  $V_2$  negatief is, dus omhoog gericht.
- Het is gebruikelijker de oplegreacties te tekenen zoals men verwacht dat ze zullen werken, dus omhoog gericht bij omlaag werkende belasting tussen de steunpunten. De oplegreacties hebben dan positieve waarden, d.w.z. ze werken inderdaad in de richting die we hebben getekend. Als ze in tegengestelde richting moeten werken blijkt dit uit het min-teken.

Regel

- Houd voor het bepalen van het evenwicht consequent één en dezelfde tekenafpraak aan om vergissingen te voorkomen.
- Teken de oplegreacties zoals dat:
  - òf gebruikelijk is
  - òf uzelf het beste uitkomt
- Verbind aan het + of - teken van de oplegreactie zoals dat volgt uit de berekening alleen de betekenis: hij werkt in de veronderstelde richting, c.q. de tegengestelde richting.

30

30. Inwendige krachten

Een lichaam kan in evenwicht zijn onder de invloed van uitwendige krachten en oplegreacties, omdat door het lichaam krachten kunnen worden overgebracht. Deze inwendige krachten laten het lichaam vervormen en leiden uiteindelijk ook tot bezwijken van het lichaam, indien deze krachten bepaalde grenswaarden overschrijden. Kennis van de grootte van de inwendige krachten is daarom uiterst belangrijk.

31

31. Bepaling van de doorsnedegrootheden N, D en M

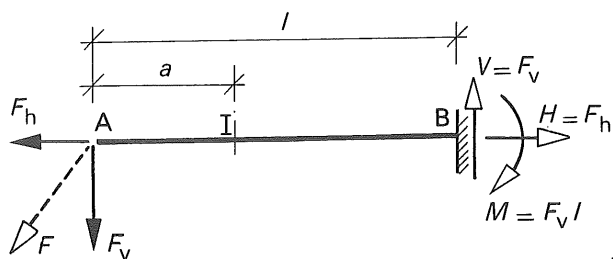
Om deze inwendige krachten bij liggerachtige constructies te bepalen brengt men een snede aan loodrecht op de staafas. Vervolgens gaat men na welke snedekrachten in deze doorsnede moeten werken om het evenwicht van het 'afgesneden' deel te verzekeren. Hiertoe kan weer gebruik worden gemaakt van de evenwichtsvoorwaarden  $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$ ,  $\Sigma M = 0$ . (zie 19.).

De hieruit volgende snedekrachten worden achtereenvolgens aangeduid met:

N = normaalkracht (kracht langs de staafas)

D = dwarskracht (kracht loodrecht op de staafas)

M = buigend moment (koppel)



a.

Voorbeeld

- In de figuur zijn voor een ingeklemde ligger eerst de oplegreacties bepaald, die zijn getekend in de richting waarin ze werken om evenwicht te maken met de uitwendige kracht F.
- De doorsnede grootheden worden bepaald in dsn I op een afstand a van het linker uiteinde. De snedekrachten N, D en M zijn zodanig uitgezet dat ze als positieve grootheden werken op het linker afgesneden deel.

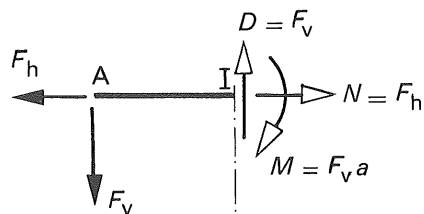
Deze tekenafspraken is nader uiteengezet in 33.; ze heeft niets te maken met de tekenafspraken voor het bepalen van het uitwendig evenwicht volgens 29.

Berekening van de doorsnede grootheden.

$$\Sigma H = 0 : -F_h + N = 0 \quad N = +F_h$$

$$\Sigma V = 0 : +F_v + D = 0 \quad D = -F_v$$

$$\Sigma M = 0 : -F_v a - M = 0 \quad M = -F_v a$$

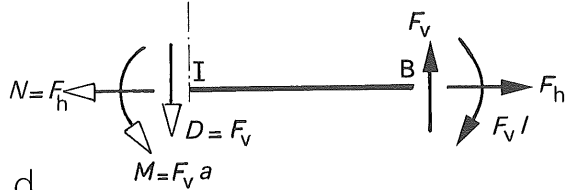


c.

- Enkele doorsnede-grootheden blijken negatief te zijn; in schets c. zijn ze ingetekend zoals ze in werkelijkheid op de ligger werken.

- Beschouwt men het rechterdeel van de ligger, dan kan men op overeenkomstige wijze het evenwicht opmaken omdat de reactiekrachten bekend zijn.

Vergelijkt men de schetsen c. en d. dan ziet men dat de krachten die op het linker en rechter 'afgesneden' deel werken even groot zijn, maar tegengesteld van teken.

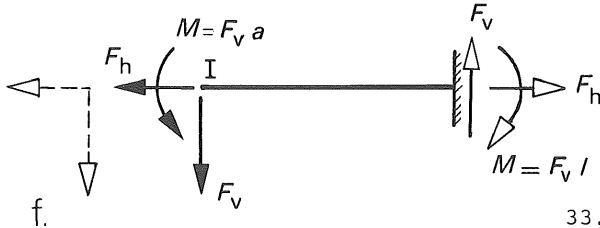
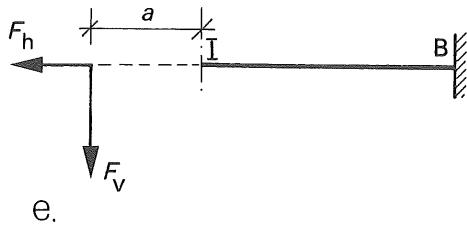


d.

Snedekrachten komen altijd paarsgewijs voor  
en er geldt het beginsel: actie = reactie



32

32. Variante voor de bepaling van de snedekrachten

Een andere weg om rechtstreeks de krachten op het rechterdeel te bepalen is als volgt:

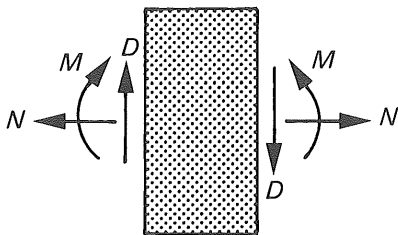
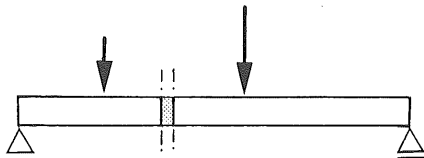
De uitwendige krachten  $F_h$  en  $F_v$  worden via het (afgesneden gedachte) linkerdeel van de ligger op het rechterdeel overgebracht. Hiervoor gelden dan de regels voor het verplaatsen van een kracht volgens 8 I en II. De horizontale kracht  $F_h$  kan langs haar werklijn worden verschoven; de verticale kracht  $F_v$  moet loodrecht op haar werklijn worden verplaatst, zodat een koppel moet worden ingevoerd met een moment  $M = F_v a$ . Het resultaat van fig. f is gelijk aan dat van fig. d uit 31.

33

33. Teken van de snedekrachten

Het teken van de snedekrachten wordt op een bepaalde manier aangenomen die afhangt van de manier waarop een liggerelement vervormt.

Deze tekenafspraken voor het inwendig evenwicht zijn bindend en dienen strikt te worden aangehouden. Ze zijn volkomen onafhankelijk van de tekenafspraken voor het bepalen van het uitwendig evenwicht volgens 29. die alleen gemakshalve worden aangehouden.



Snijdt men een elementje uit een ligger dan werken de positieve normaalkrachten  $N$ , dwarskrachten  $D$  en buigende momenten  $M$  van buiten uit op de materie zoals aangegeven in de figuur.

$N$  Normaalkracht is positief als de kracht op de beschouwde snede naar buiten werkt

+ = trek (symbool  $\leftarrow \rightarrow$ )

- = druk (symbool  $\rightarrow \leftarrow$ )

$D$  Dwarskracht is positief als de kracht die op het linker zijvlakje van het elementje werkt van de beschouwer af is gericht en de kracht die op het rechter zijvlakje werkt naar de beschouwer toe is gericht (resp. omhoog en omlaag is gericht bij een horizontale ligger). Het symbooltje (afschuifteken) geeft de sterk geschematiseerde vervorming aan van de liggerelementen links en rechts van de snede, zie 34.

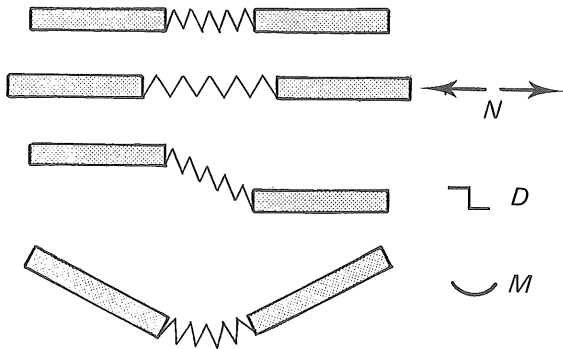
Afschuiftekens + =  $\lrcorner$  - =  $\ulcorner$

$M$  Buigend Moment wordt bij horizontale liggers positief gerekend als de vervorming zodanig is dat de bolle zijde van de ligger aan de onderzijde ligt en de holle zijde boven.

Buigtekens: + =  $\smile$  - =  $\frown$

34

34. Symbolen voor N, D en M



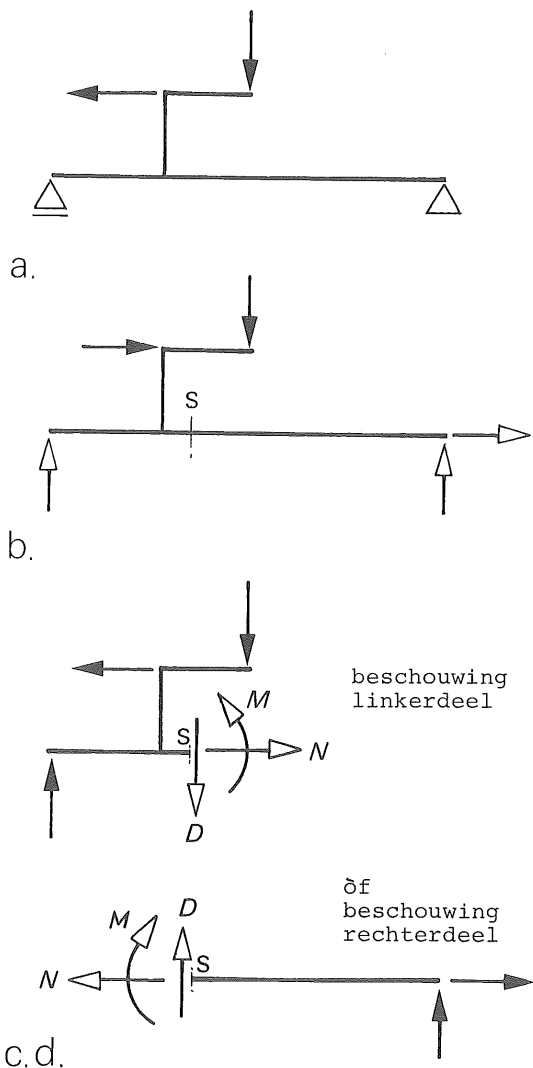
Men kan een indruk van de vorm van de zojuist beschreven symbooltjes krijgen als men een balkje beschouwt waarvan een gedeelte vervangen is door een veer. Brengt men zo goed mogelijk met de hand de diverse snedekrachten aan, dan geeft de vorm van dit 'liggertje' ook globaal de vorm van het symbooltje aan.

Het teken van de normaalkrachten en dwarskrachten is onafhankelijk van de ligging van de ligger, zoals men gemakkelijk ziet door zo'n elementje met de daarop werkende snedekrachten een halve slag in het platte vlak te draaien.

Bij het buigend moment wordt het teken hierdoor echter omgekeerd. Bij schuinstaande of verticale liggers wordt daarom in het algemeen per geval een tekenafspraken gemaakt voor het buigend moment die ons het beste uitkomt, zie 74. t/m 80.

Bij het rekenen zal men steeds gebruik maken van plus- en mintekens. Als men de afspraken van 35. aanhoudt, hebben de doorsnedegrootheden automatisch het juiste teken. Bent u echter onzeker over de juistheid van het teken, gebruik dan altijd de symbolen voor dwarskracht en moment en vermeld voor de normaalkrachten minstens trek of druk. Pas de symbolen voor D en M altijd toe bij liggers en staven die niet horizontaal zijn.

35

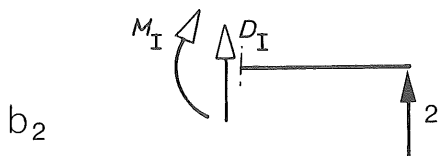
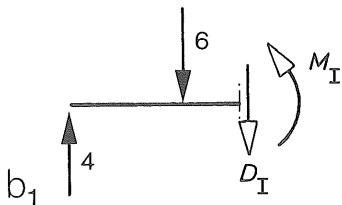
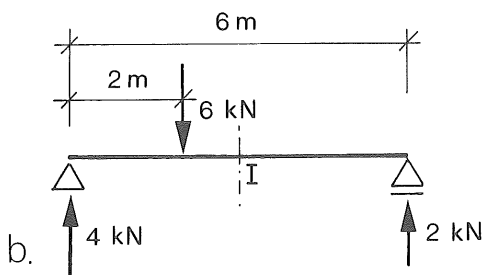
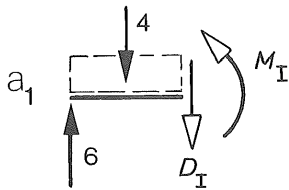
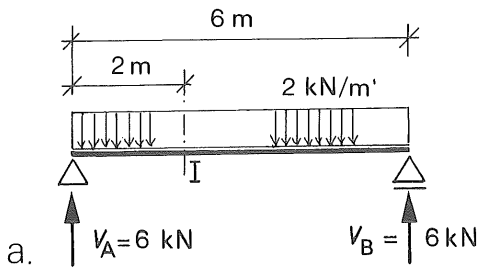


35. Berekening van N, D en M

Algemene gang van zaken:

- Teken de constructie met de daarop werkende krachten.
- Bereken de oplegreacties en teken deze in de richting zoals ze werken op de constructie.
- Breng een snede aan een beschouw één van beide 'afgesneden' gedeelten met alle uitwendige krachten en/of oplegreacties die op dit gedeelte werken. (Pak het afgesneden gedeelte bij wijze van spreken in de hand en ga na welke krachten die hand moet kunnen overbrengen).
- Teken de doorsnedegrootheden N, D en M zoals ze in positieve richting op de beschouwde snede werken.
- Bepaal de waarden van N, D en M met behulp van de drie evenwichtsvergelijkingen:  
 $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$ ,  $\Sigma M = 0$ .
- Ga na of de vervorming klopt en teken de symbooltjes naast de uitkomst.

36



## 36. Voorbeelden

a. Gegeven: een ligger op twee steunpunten onder gelijkmatig verdeelde belasting.  
Gevraagd: bepaal de dwarskracht en het buigende moment in doorsnede I.

a<sub>1</sub>. Oplossing: het evenwicht van het linker deel van de ligger wordt beschouwd; het buigend moment wordt opgemaakt om dsñ. I. De gelijkmatig verdeelde belasting op dit deel mag hierbij worden vervangen door de resultante  $F = 2 \text{ kN/m}' \cdot 2 \text{ m} = 4 \text{ kN}$ .

$$\Sigma V = 0 : -6 + 4 + D_I = 0$$

$$D_I = +2 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0 : +6 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - M_I = 0$$

$$M_I = +8 \text{ kNm}$$

b. Gegeven: een ligger op twee steunpunten belast door een puntlast.

Gevraagd: Bepaal D en M in dsñ. I.

Oplossing: het evenwicht van het linker deel wordt beschouwd, ter controle wordt ook nog het evenwicht van het rechterdeel nagegaan.

b<sub>1</sub>. Linker deel

$$\Sigma V = 0 : -4 + 6 + D_I = 0$$

$$D_I = -2 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0 : +4 \cdot 3 - 6 \cdot 1 - M_I = 0$$

$$M_I = +6 \text{ kNm}$$

b<sub>2</sub>. Rechter deel

$$\Sigma V = 0 : -D_I - 2 = 0$$

$$D_I = -2 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0 : +M_I - 2 \cdot 3 = 0$$

$$M_I = +6 \text{ kNm}$$

Bij voorkeur beschouwt men dat liggerdeel waar de minste krachten op aangrijpen.

Indien men geroutineerd genoeg is om het gehele krachtenspel te doorzien, kan men zich beperken tot het bepalen van de doorsnedegrootheden in enkele maatgevende doorsneden.

Voor een goed begrip van de krachtswerking is het echter wenselijk om de grootte van N, D en M in elke doorsnede te kennen. Ook hierbij behoeven de momenten slechts in enkele doorsneden werkelijk te worden berekend, zie 37. en 38.

37

37. Puntlast op een ligger

- a. Ligger op twee steunpunten die wordt belast door een schuin staande puntlast (ontbonden in  $F_1$  en  $F_2$ )

Bepaling van de oplegreacties: (momenten om B en A)

$$\begin{aligned} \Sigma H = 0 & : +H_A - F_2 = 0 & H_A & = F_2 \\ \Sigma M_B = 0 & : +V_A l - F_1 b = 0 & V_A & = \frac{b}{l} F_1 \\ \Sigma M_A = 0 & : +F_1 a - V_B l = 0 & V_B & = \frac{a}{l} F_1 \end{aligned}$$

Alle oplegreacties zijn in de juiste richting getekend en kunnen zo worden gebruikt.

Bepaling van de doorsnedegrootheden:

- b. Formules voor het liggergedeelte links van de puntlast ( $0 < x < a$ ):

$$\begin{aligned} \Sigma H = 0 & : +F_2 + N_x = 0 & N_x & = -F_2 \\ \Sigma V = 0 & : -\frac{b}{l} F_1 + D_x = 0 & D_x & = +\frac{b}{l} F_1 \\ \Sigma M = 0 & : +\frac{b}{l} F_1 x - M_x = 0 & M_x & = +\frac{b}{l} F_1 x \end{aligned}$$

- c. Formules voor het liggergedeelte rechts van de puntlast ( $a < x < l$ ):

$$\begin{aligned} \Sigma H = 0 & : +F_2 - F_2 + N_x = 0 & N_x & = 0 \\ \Sigma V = 0 & : -\frac{b}{l} F_1 + F_1 + D_x = 0 & D_x & = \frac{l-b}{l} F_1 \\ \Sigma M = 0 & : +\frac{b}{l} F_1 x - F_1 \cdot (x-a) - M_x = 0 & M_x & = \frac{a}{l} F_1 (l-x) \end{aligned}$$

Het buigende moment bereikt zijn maximale waarde onder de puntlast ( $x = a$ ) en is gelijk aan:

$$M_{\max} = \frac{ab}{l} F_1 \quad \dots\dots (4)$$

Diagrammen voor de doorsnede-grootheden

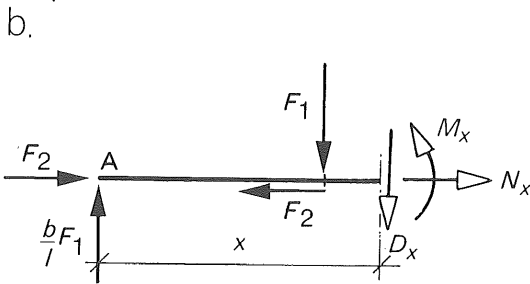
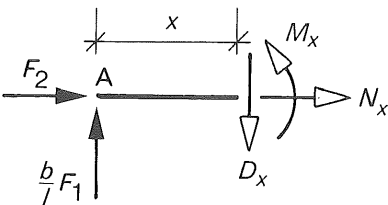
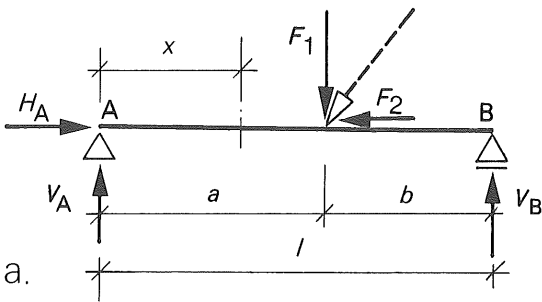
Door de formules in 37. is het verloop van N en D en M volkomen vastgelegd. Men kan voor elk van deze grootheden een diagram tekenen door de waarde van de betreffende grootheid loodrecht op de ligger-as uit te zetten. Hierbij hanteert men de volgende tekenafspraken:

Normaalkrachten: positieve waarden boven de as  
 Dwarskrachten : " " " " "  
 Momenten : " " beneden " "

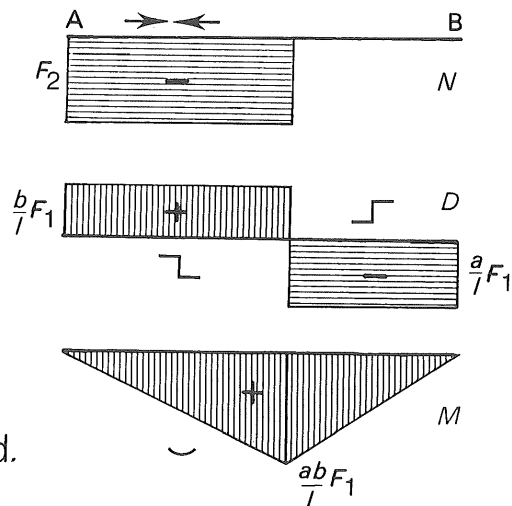
De vorm van deze diagrammen blijkt uiterst eenvoudig te zijn.

De normaalkrachten- en dwaarskrachtenlijn hebben een constante waarde tussen de aangrijpingspunten van de puntlasten en variëren sprongsgewijs ter plaatse van de puntlasten.

De momentenlijn verloopt lineair tussen de puntlasten. Ter plaatse van de puntlasten treden wel knikken in het momentenverloop op maar geen sprongen.

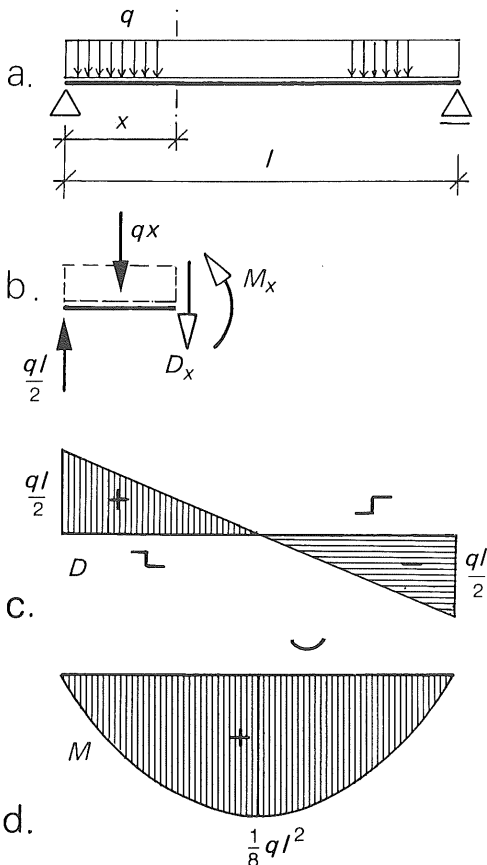


c.



d.

38

38. Gelijkmatig verdeelde belasting op een ligger

- a. Ligger op twee steunpunten, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting.  
De totale belasting bedraagt  $ql$  en de oplegreacties uit symmetrie-overwegingen elk  $\frac{1}{2} ql$ .
- b. Bepaling van het evenwicht van het linkerdeel van de ligger op een afstand  $x$  vanaf de linker oplegging:

$$\Sigma V = 0 : \quad -\frac{ql}{2} + qx + D_x = 0$$

$$D_x = q\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad \dots\dots (5)$$

De dwarskracht verloopt lineair en is gelijk aan nul voor  $x = l/2$ , zie fig. c.

$$\Sigma M = 0 : \quad +\frac{ql}{2}x - qx\frac{x}{2} - M_x = 0$$

$$M_x = \frac{1}{2} qx(1-x) \quad \dots\dots (6)$$

Het buigend moment verloopt parabolisch, zie fig. d. Het maximum moment treedt op in het veldmidden voor  $x = \frac{l}{2}$  en bedraagt:

$$M_{\max} = \frac{1}{8} ql^2 \quad \dots\dots (7)$$

Bij een ligger onder gelijkmatig verdeelde belasting verloopt de dwarskracht altijd lineair en het buigende moment altijd parabolisch.

39. Routinematige bepaling van het buigende moment in een doorsnede

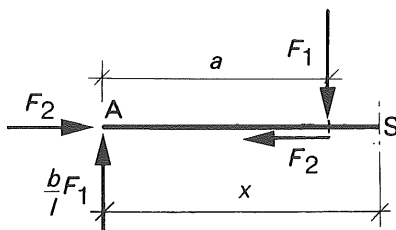
Tot nu toe is voor de bepaling van het buigende moment in een doorsnede steeds het evenwicht van het afgesneden gedeelte van de ligger beschouwd waarbij zowel de uitwendige krachten als de doorsnedegrootheden op dat liggerdeel werden getekend en de volledige evenwichtsvergelijking werd opgeschreven.

Men bereikt echter precies hetzelfde als men alleen het statisch moment van de uitwendige krachten opmaakt ten opzichte van de betreffende snede indien het aandeel van alle opwaarts gerichte krachten positief in rekening wordt gebracht en het aandeel van alle omlaag gerichte krachten negatief.

Voorbeeld, zie 37. fig. c.

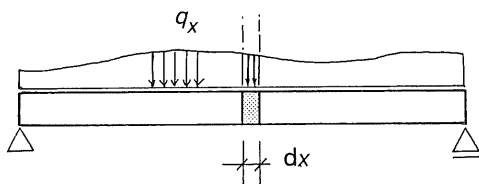
$$M_x = +\frac{b}{l}F_1 x - F_1(x-a)$$

39

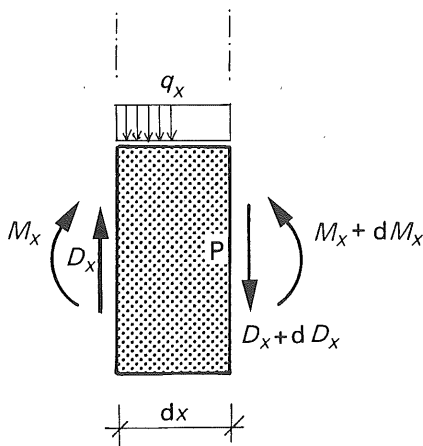


Bepaling van  $M_x$  in punt S

40



a.



b.

40. Evenwichtsbeschouwingen op een liggerelementje

- a. Bij een ligger onder een variërend verdeelde belasting  $q_x$  wordt het verticale evenwicht en het momentenevenwicht beschouwd van een liggerelementje ter lengte  $dx$ . Aangezien de dwarskracht en het buigende moment ook in elk punt van de ligger zullen variëren, worden deze grootheden in de linker doorsnede van het elementje aangegeven met  $D_x$  en  $M_x$ . In de rechter doorsnede zijn beide waarden toegenomen tot  $D_x + dD_x$  en  $M_x + dM_x$ . Voor de belasting wordt de gemiddelde waarde van  $q_x$  genomen over de afstand  $dx$ .

- b. Bepaling van het verticale evenwicht  $\Sigma V = 0$ :

$$-D_x + q_x dx + (D_x + dD_x) = 0$$

Hieruit volgt:

$$q_x = - \frac{dD_x}{dx} \quad \dots (8)$$

- c. Het momentenevenwicht  $\Sigma M = 0$  wordt opgemaakt om een punt P van de rechterdoorsnede.

$$+M_x + D_x dx - q_x dx \cdot \frac{dx}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

De derde term  $\frac{1}{2}q_x \cdot dx^2$  is oneindig klein van hoger orde en mag ten opzichte van de andere termen worden verwaarloosd. Men vindt dan:

$$D_x = \frac{dM_x}{dx} \quad \dots (9)$$

Uit (8) en (9) volgt:

$$q_x = - \frac{d^2 M_x}{dx^2} \quad \dots (10)$$

Door integratie gaan (8), (9) en (10) over in:

$$D_x = - \int q_x \cdot dx \quad \dots (8a)$$

$$M_x = + \int D_x \cdot dx \quad \dots (9a)$$

$$M_x = - \iint q_x \cdot dx \quad \dots (10a)$$

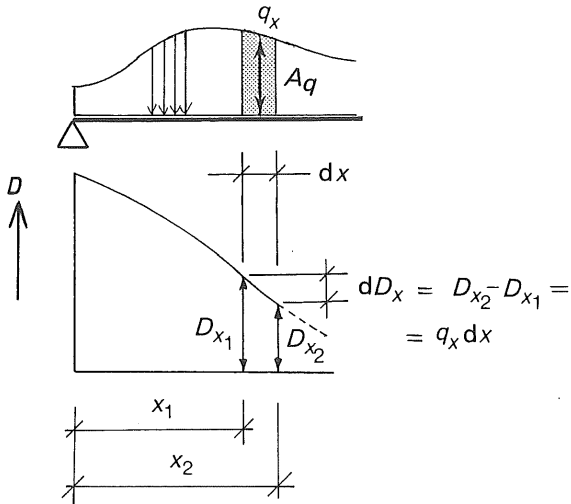
Als de belasting gegeven is kan het moment worden bepaald door twee maal integreren (10a).

Dit doet men door eerst de dwarskrachten te bepalen door integratie van de belastingen en vervolgens de momenten door integratie van de dwarskrachten (formules (8a) en (9a)). Deze procedure is nader uiteengezet in 41. en 44. Dit tweemaal integreren van de belasting kan ook rechtstreeks gebeuren met een grafische methode (poolfiguur en stangenveelhoek), zie 99. en 100.

Uiteraard kan ook in iedere snede het statische moment worden opgemaakt van alle krachten die op het liggerdeel links of rechts van de snede aangrijpen zoals is aangegeven in 37. t/m 39.

41

41. Bepaling van de dwarskrachten door integratie van het belastingvlak



In de figuur is een ligger aangegeven onder een willekeurig variërende belasting  $q_x$ . De toename van de dwarskracht over een afstandje  $dx$  volgt uit formule (8):

$$dD_x = -q_x dx \quad \dots (8)$$

Uit het - teken volgt dat de dwarskracht afneemt bij toenemende  $x$ .

Schrijft men formule (8a) als een bepaalde integraal waarmee de toename van de dwarskracht tussen de doorsneden  $x_1$  en  $x_2$  wordt bepaald dan volgt:

$$D_{x_2} - D_{x_1} = -\int_{x_1}^{x_2} q_x dx \quad \dots (8b)$$

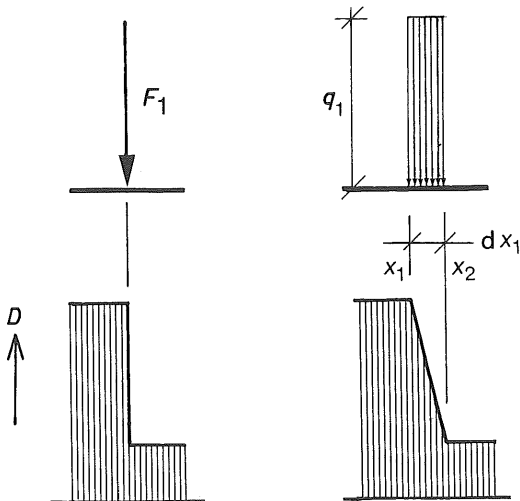
De bepaalde integraal achter het gelijkteken stelt het oppervlak  $A_q$  voor van het belastingvlak tussen de doorsneden  $x_1$  en  $x_2$ . Men kan (8b) dan ook schrijven als:

$$D_{x_2} = D_{x_1} - A_q \quad \dots (8c)$$

Als de dwarskracht in een bepaalde doorsnede bekend is kan de dwarskracht in een wat verderop gelegen doorsnede dus gemakkelijk worden bepaald.

42

42. Behandeling van puntlasten



De vraag is hoe nu te handelen met puntlasten. Echte puntlasten bestaan in werkelijkheid niet, er is in feite sprake van een grote gelijkmatig verdeelde belasting over een klein oppervlak. In ons rekenschema maken we er ons echter niet druk om hoe groot  $q_x$  is en de bijbehorende  $dx$ , maar stellen we ons tevreden met de wetenschap dat de bepaalde integraal volgens (8b) juist gelijk is aan de grootte van de puntlast  $F$  en we laten de dwarskracht sprongsgewijs variëren inplaats van stijl te laten verlopen tussen de dicht bij elkaar gelegen doorsneden  $x_1$  en  $x_2$ .

Puntlast op een ligger:	Geconcentreerde belasting
de dwarskracht varieert sprongsgewijs.	op een ligger: de dwarskracht verloopt lineair.



43\*

43. Voorbeeld voor de bepaling van de dwarskrachten

Voorbeeld: Een ligger op twee steunpunten onder een willekeurig variërende belasting.

De belasting wordt in moten verdeeld van bijv. 2 m en de belasting per moot wordt constant verondersteld en gelijk aan de gemiddelde waarde. Men heeft dan een ligger op twee steunpunten belast door een aantal puntlasten die elk geacht worden in het midden van de betreffende moot aan te grijpen. De oplegreacties kunnen dan gemakkelijk worden bepaald. De dwarskracht ter plaatse van oplegpunt A is dan gelijk aan  $V_A$ ; per moot wordt de dwarskracht verminderd met de op die moot aangrijpende belasting. De resultaten gelden dus juist op de scheidingslijnen van de moten. Deze waarden kunnen met goede benadering worden verbonden door rechte lijnen.

Numerieke uitwerking

- De continu variërende belasting  $q_x$  is in moten van 2 m breedte verdeeld; de gemiddelde waarde van  $q$  per moot is in fig. a. aangegeven.
- De totale belasting per moot wordt vervangen door een puntlast die in het midden van de moot aangrijpt ( $F_1 = 2 \text{ m} * 10 \text{ kN/m} = 20 \text{ kN}$  enz.)  
 $\Sigma F = 20 + 36 + 50 + 40 + 32 = 178 \text{ kN}$   
 De puntlast van 50 kN blijft uiteraard ongewijzigd  
 Statisch moment om B levert de oplegreactie  $V_A$ :  
 $V_A * 8 = 20 * 7 + 36 * 5 + 50 * 4 + 40 * 3 + 32 * 1 =$   
 $= 140 + 180 + 200 + 120 + 32 = 672 \text{ kNm}$   
 $V_A = 672 / 8 = 84 \text{ kN}$   
 $V_B = 178 - 84 = 94 \text{ kN}$
- De puntlasten in fig. b. zijn uitsluitend ingevoerd om de oplegreacties gemakkelijk te kunnen bepalen. In fig. c worden de numerieke waarden van de oplegreacties als puntlasten ingevoerd, voor de continu variërende belasting  $q$  wordt weer met het oorspronkelijke belastingvlak gewerkt; per moot is het oppervlak  $A_q$  (dus de kracht  $F$ ) ingeschreven.
- Op de deellijnen van de moten kan dan de dwarskracht gemakkelijk worden bepaald.

$$D_0 = 84 (= V_A)$$

$$D_1 = 84 - 20 = 64$$

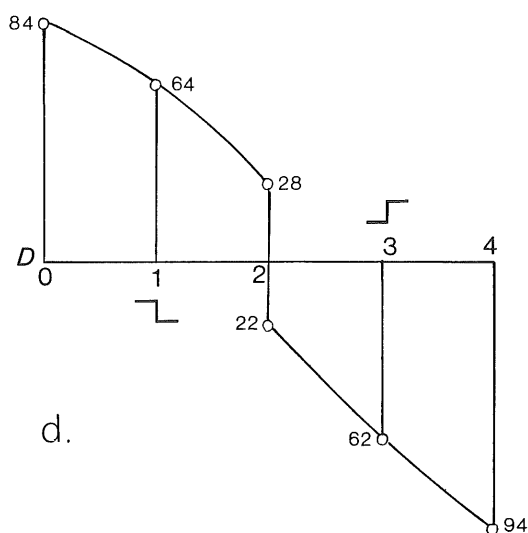
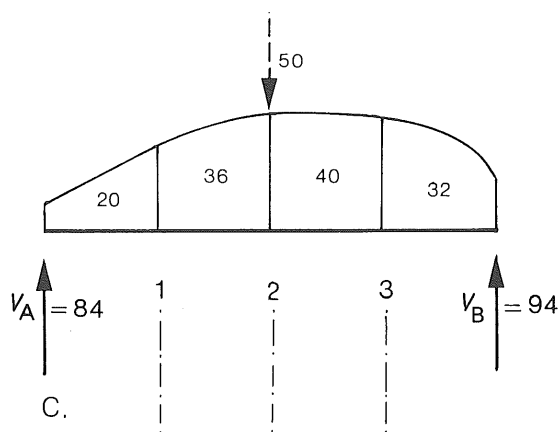
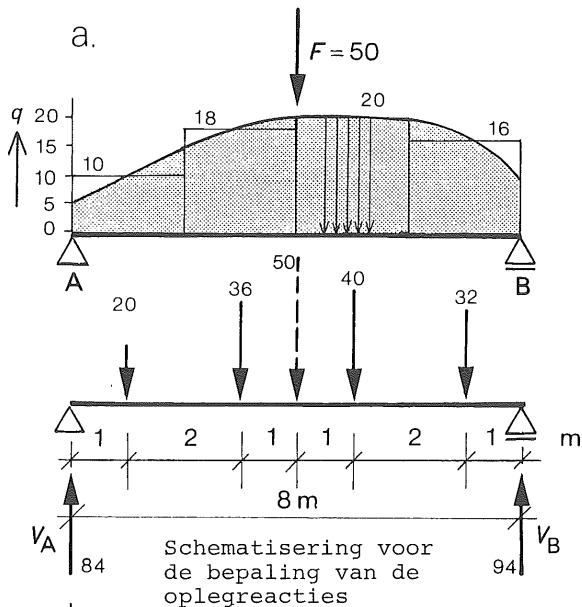
$$D_2 = 64 - 36 = 28 \quad (\text{links van de puntlast})$$

$$D_2' = 28 - 50 = -22 \quad (\text{rechts van de puntlast})$$

$$D_3 = 22 - 40 = -62$$

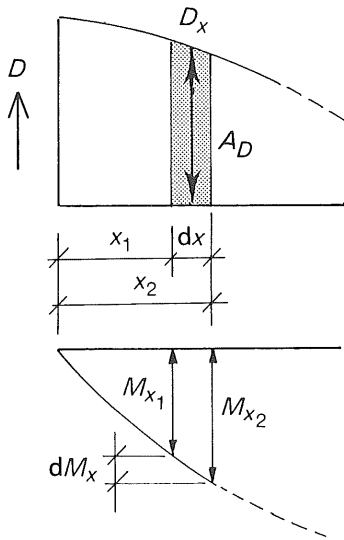
$$D_4 = 62 - 32 = -94 (= V_B)$$

De gevonden waarden zijn door een vloeiende kromme verbonden. Voor de verdere berekening kan men zonder bezwaar aannemen dat de dwarskracht tussen de berekende waarden lineair verloopt.



44

44. Bepaling van de momenten door integratie van het dwarskrachtenvlak



Op overeenkomstige wijze als in 41. kan men de momenten afleiden uit de dwarskrachten; uit (9) volgt:

$$dM_x = D_x dx \quad \dots (9a)$$

Uit formule (9a) volgt de toename van het buigend moment tussen de doorsneden  $x_1$  en  $x_2$ :

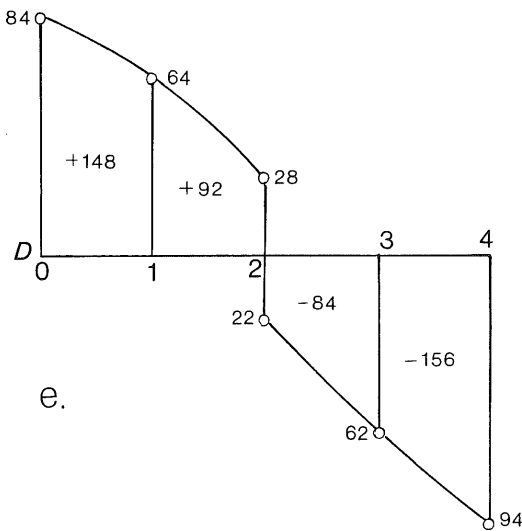
$$M_{x_2} - M_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} D_x dx \quad \dots (9b)$$

De bepaalde integraal achter het gelijkteken stelt het oppervlak  $A_D$  voor van het dwarskrachtenvlak tussen de doorsneden  $x_1$  en  $x_2$ . Men kan (9b) dan ook schrijven als:

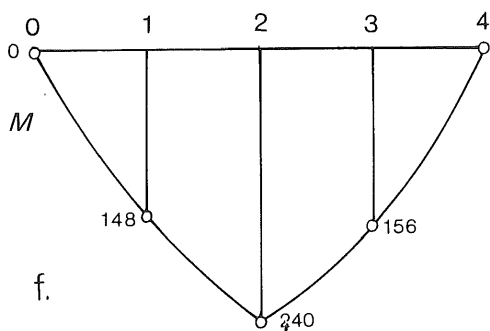
$$M_{x_2} = M_{x_1} + A_D \quad \dots (9c)$$

Als het moment in doorsnede  $x_1$  bekend is kan men het moment in een wat verderop gelegen doorsnede  $x_2$  gemakkelijk bepalen.

45\*



e.



f.

45. Voorbeeld voor de bepaling van de momenten

e. Het dwarskrachtenvlak van fig. d. uit 43. is nogmaals weergegeven in fig. e. Per moot is het oppervlak  $A_D$  van het dwarskrachtenvlak aangegeven.

$$A_{D(0-1)} = (84 + 64)/2 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 148 \text{ kNm enz.}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } M_1 &= 0 + 148 = 148 \\ M_2 &= 148 + 92 = 240 \\ M_3 &= 240 - 84 = 156 \\ M_4 &= 156 - 156 = 0 \end{aligned}$$

De scherpe knik in het momentenverloop wordt veroorzaakt door de sprong in het dwarskrachtenverloop ten gevolge van de puntlast van 50 kN. Door het gebogen verloop van de dwarskrachtenlijn zijn de oppervlakken  $A_D$  eigenlijk iets groter dan berekend. Dit houdt in dat men dan in dsn 4 een moment  $M_4$  vindt dat iets afwijkt van nul. Om dat goed te krijgen hadden we de oplegreacties  $V_A$  en  $V_B$  nauwkeuriger moeten berekenen. Bij de q-belasting is er immers van uitgegaan dat de resultante per moot in het midden aangrijpt, terwijl dit eigenlijk het zwaartepunt van het betreffende trapezium zou moeten zijn.

Voor praktische toepassingen zijn deze kleine verschillen volkomen verwaarloosbaar.

46

46. Constante gelijkmatig verdeelde belasting

$$q_x = q$$

$$D_x = - \int q \, dx = - qx + C_1 \quad \dots (11)$$

$$M_x = + \int D_x \, dx = \int (-qx + C_1) \, dx = - \frac{1}{2} qx^2 + C_1 x + C_2 \quad \dots (12)$$

De constanten  $C_1$  en  $C_2$  volgen uit de randvoorwaarden die optreden aan de uiteinden van de ligger. Deze zullen zeker voor de beginner niet altijd even gemakkelijk te vinden zijn.

Als algemene regel volgt echter uit (11) en (12):

Indien een liggergedeelte is belast door een gelijkmatig verdeelde belasting dan geldt:  
De dwarskracht verloopt lineair.  
Het buigend moment verloopt parabolisch.

Voorbeelden:

a. Volledig ingeklemde ligger

Randvoorwaarden:

voor  $x = 0$  geldt  $D_x = 0$

voor  $x = 0$  geldt  $M_x = 0$

Uit (11) volgt dan:

$$0 = 0 + C_1 \quad C_1 = 0$$

Uit (12) volgt:

$$0 = 0 + 0 + C_2 \quad C_2 = 0$$

De vergelijkingen (11) en (12) gaan dan over in:

$$D_x = - qx \quad \dots (11a)$$

$$M_x = - \frac{1}{2} qx^2 \quad \dots (12a)$$

b. Vrij opgelegde ligger

Randvoorwaarden:

voor  $x = 0$  geldt  $M_x = 0$

voor  $x = l$  geldt  $M_x = 0$

Uit (12) volgt dan:

$$0 = 0 + 0 + C_2 \quad C_2 = 0$$

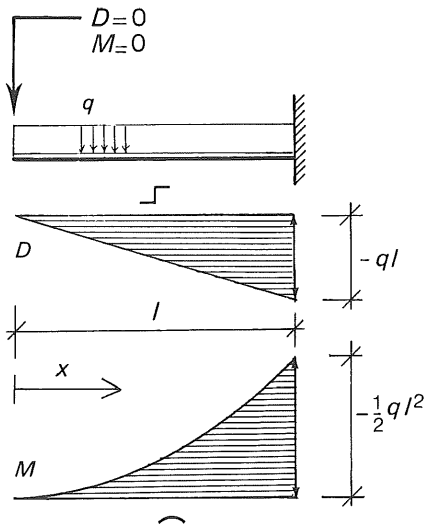
$$0 = - \frac{1}{2} ql^2 + C_1 l + C_2 \quad C_1 = \frac{1}{2} ql$$

De vergelijkingen (11) en (12) gaan dan over in:

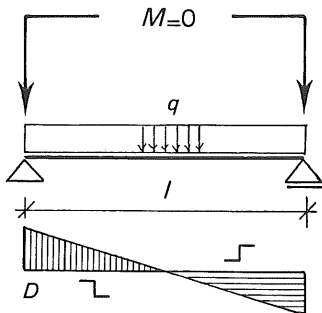
$$D_x = - qx + \frac{1}{2} ql = q\left(\frac{1}{2} - x\right) \quad (11b)$$

$$M_x = - \frac{1}{2} qx^2 + \frac{1}{2} qlx = \frac{1}{2} qx(1 - x) \quad (12b)$$

De formules (11b) en (12b) zijn volkomen gelijk aan de reeds eerder afgeleide formules (5) en (6).

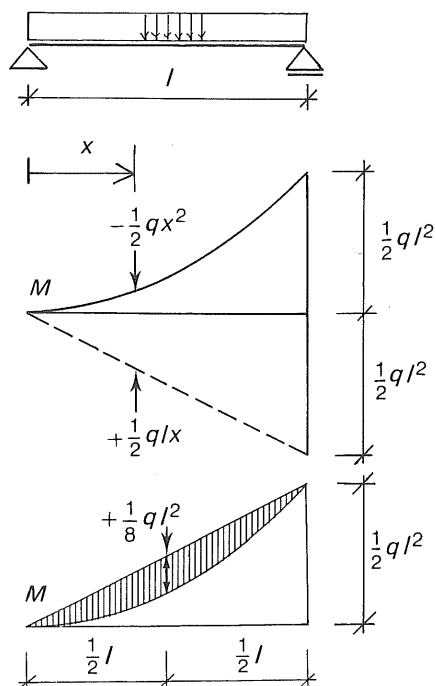


a.



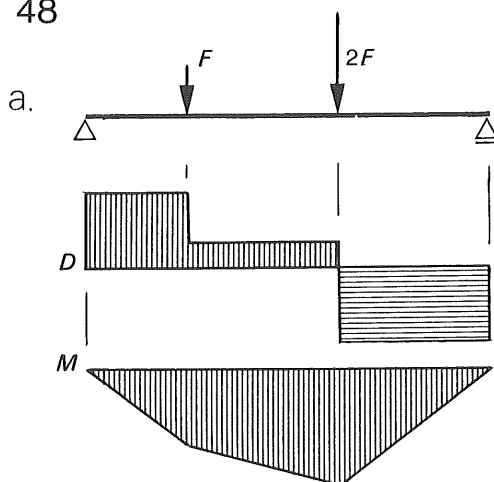
b.

47\*

47. Parabolisch momentenverloop bij een q-belasting

Om duidelijk te maken dat bij een bepaalde  $q$  het momentenverloop altijd parabolisch is, wordt de momentenlijn voor de vrij opgelegde ligger op een wat andere wijze getekend dan in 38. Hiertoe wordt de eerste uitdrukking van formule (12b) gebruikt die nog uit twee afzonderlijke termen bestaat. De eerste term  $-\frac{1}{2}qx^2$  is precies dezelfde als voor de volledig ingeklemde ligger volgens formule (12a). De tweede positieve term geeft een rechte lijn aan, die als stippellijn als positieve waarde is uitgezet. Om in de tekening echter de rechte gespiegeld om de horizontale nullijn. Het oppervlak tussen deze rechte en de parabool geeft dan juist het gezochte momentenvlak aan. Min of meer analoge wijzen van spiegelen van momentenlijnen worden behandeld in 61. t/m 65.

48

48. De gelijkmatig verdeelde belasting ontbreekt op een liggerdeel

a. De formules (11) en (12) gaan dan over in:

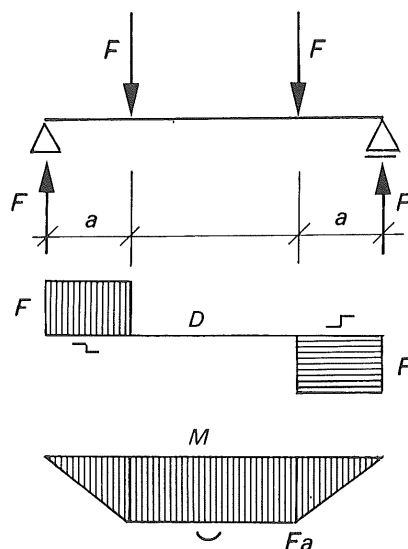
$$D_x = C_1 \quad \dots (13)$$

$$M_x = C_1 x + C_2 \quad \dots (14)$$

In dergelijke gevallen is de dwarskracht constant en verloopt het buigende moment lineair. Dit geldt dus altijd voor liggers die belast zijn door puntlasten voor de gedeelten tussen de puntlasten.

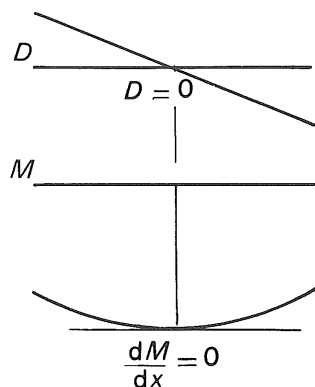
We volstaan met deze constatering; het oplossen van de constanten  $C_1$  en  $C_2$  voor de opvolgende onbelaste liggerdelen wordt uiterst omslachtig. Men volgt dan de algemene procedure volgens 41., 42. en 44. die in 52. nader is uitgewerkt.

b.



b. Indien over een liggerdeel de dwarskracht  $D_x$  gelijk is aan nul, volgt uit (13) dat  $C_1 = 0$ , zodat geldt  $M_x = C_2$ , het buigende moment is in zo'n geval constant.

49

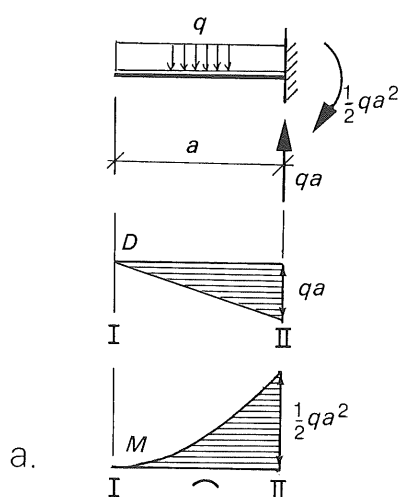
49. q-last over de gehele ligger

Voor een beter begrip zal onder een maximum worden verstaan: een zo groot mogelijke absolute waarde van het moment en onder een minimum: een zo klein mogelijke absolute waarde van het moment.

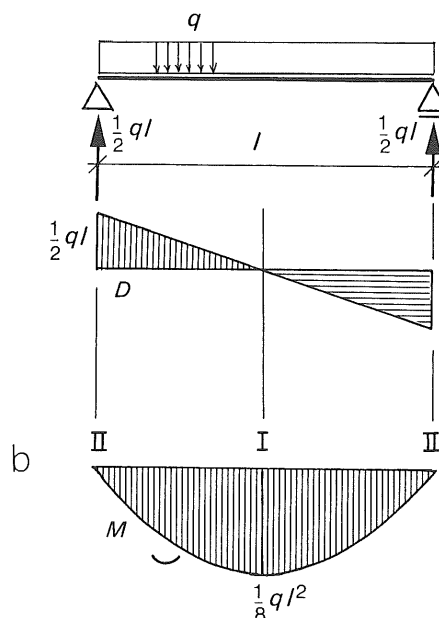
Indien men het verloop van de gehele momentenlijn bepaalt zoals aangegeven in 45. of 52. komt men de maximale en minimale momenten vanzelf tegen. Soms worden echter alleen de extreme momenten bepaald of wenst men deze waarden exact te kennen. Uit (9) volgt dat de helling van de momentenlijn gelijk is aan de dwarskracht. Het moment bereikt een wiskundig extreme waarde als de raaklijn aan de momentenlijn horizontaal is, d.w.z.  $\frac{dM_x}{dx} = 0$  en bijgevolg geldt dan ook  $D_x = 0$

Dit geldt echter alleen maar binnen het gebied waarvoor de afgeleide formules geldig zijn. Op de randen van het geldigheidsgebied kunnen zogenaamde randminima of maxima optreden waarvan de plaats niet volgt door differentieren.

De meest zekere manier om de maximale en minimale momenten te bepalen is het tekenen van de gehele dwarskrachtenlijn. De extrema treden dan op waar de dwarskracht gelijk is aan nul. Tevens moet echter worden nagegaan wat de waarde is van de momenten op de randen van het geldigheidsgebied.



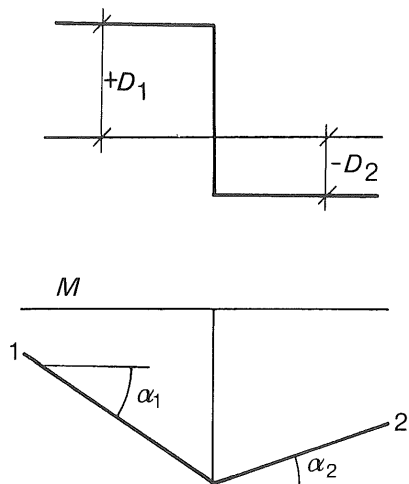
- a. Volledig ingeklemde ligger, gelijkmatig verdeeld belast.
- dsn I :  $D_x = 0$  wiskundig extremum:  
 $M_{\min} = 0$
- dsn II :  $D_x \neq 0$  rand extremum:  
 $M_{\max} = -\frac{1}{2} qa^2$



- b. Ligger op twee steunpunten, gelijkmatig verdeeld belast.
- dsn I :  $D_x = 0$  wiskundig extremum:  
 $M_{\max} = \frac{1}{8} ql^2$
- dsn II :  $D_x \neq 0$  rand extremum  
 $M_{\min} = 0$

50

a.



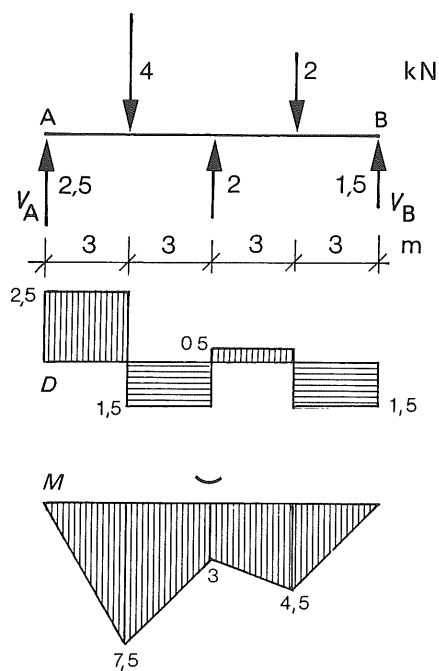
$$1: \frac{dM}{dx} = \text{tg } \alpha_1 = + D_1$$

$$2: \frac{dM}{dx} = \text{tg } \alpha_2 = - D_2$$

50. Extreme momenten bij puntlasten

a. De gegeven regel blijft ook geldig bij puntlasten waar de dwarskrachtenlijn de nullijn sprongsgewijs passeert. Aangezien de dwarskracht dan sprongsgewijs overgaat van een positieve in een negatieve waarde of omgekeerd, betekent dit dat ook de helling van de momentenlijn sprongsgewijs van positief overgaat in negatief of omgekeerd. Het moment zelf heeft dan daar ter plaatse één en dezelfde waarde die echter een maximum dan wel een minimum moet zijn.

b.



b. Bij het getekende voorbeeld passeert de dwarskrachtenlijn de nullijn bij elke puntlast omdat de puntlasten afwisselend omhoog en omlaag zijn gericht. Dit betekent dat onder elke puntlast een plaatselijk maximum of minimum optreedt en men moet alle extrema vergelijken om de maatgevende momenten te vinden.

51. Gelijkmatig verdeelde belasting over een gedeelte van de ligger

- a. Indien een ligger slechts over een gedeelte een gelijkmatig verdeelde belasting draagt kan men de plaats van het dwarskrachtnulpunt ook analytisch bepalen door te stellen:

$$D_x = V_A - qx = 0 \quad \rightarrow \quad x = V_A/q$$

zodat het maximale moment gelijk is aan:

$$M_{\max} = +V_A x - \frac{1}{2} qx^2 = V_A \frac{V_A}{q} - \frac{1}{2} q \cdot \frac{V_A^2}{q^2}$$

ofwel

$$M_{\max} = \frac{V_A^2}{q} - \frac{1}{2} \frac{V_A^2}{q} = \frac{V_A^2}{2q} \quad \dots (15)$$

De formule is alleen geldig indien een constante gelijkmatig verdeelde belasting aangrijpt vanaf één oplegging tot ergens in het veld.

Niettegenstaande de plaats van het maximale moment analytisch kan worden bepaald, wordt toch aangeraden het dwarskrachtenvlak even te tekenen om geheel zeker te zijn.

- b. Men dient met een dergelijke berekening erg voorzichtig te zijn als er op het gedeelte met gelijkmatig verdeelde belasting ook puntlasten voorkomen, zoals het volgende numerieke voorbeeld aangeeft.

- Neem aan dat  $x$  links van  $F$  ligt:

$$V_A - qx = 0 \quad x = V_A/q = 11/3 = 3,67 \text{ m}$$

deze uitkomst kan niet worden gebruikt omdat de afstand betrekking heeft op een punt rechts van  $F$  ( $3,67 > 3$ ).

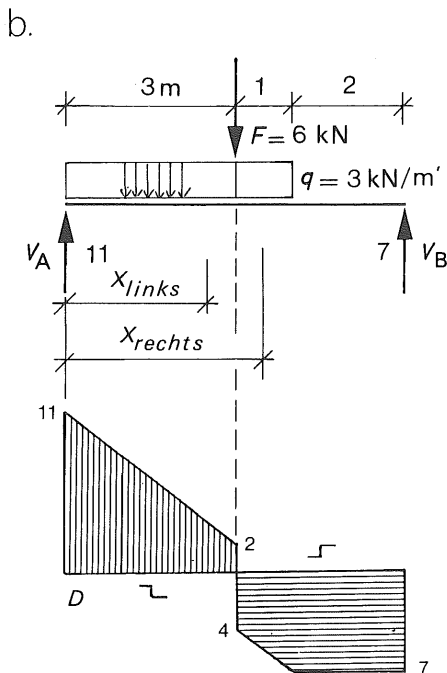
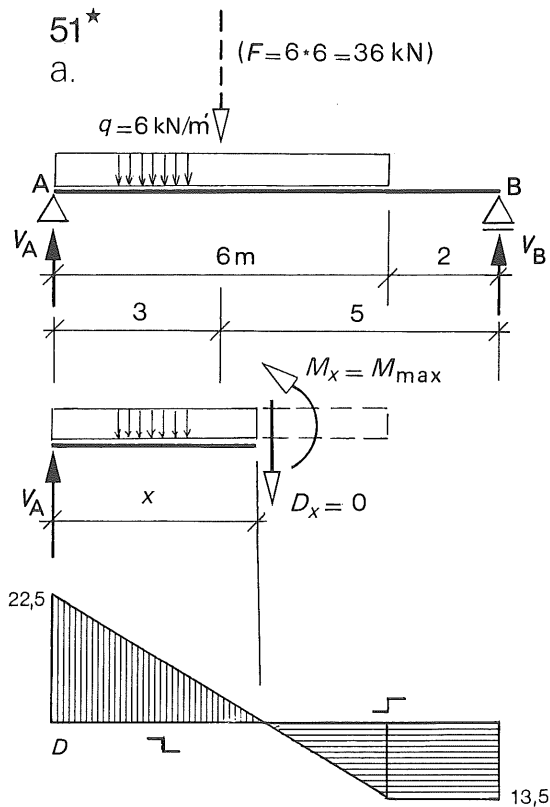
- Neem aan dat  $x$  rechts van  $F$  ligt:

$$V_A - qx - F = 0 \quad x = (V_A - F)/q = \frac{11-6}{3} = 1,67$$

de uitkomst is niet geldig omdat dit punt nu weer links van  $F$  ligt ( $1,67 < 3$ ).

- De dwarskracht wordt dus nul onder de puntlast (zoals uiteraard direct volgt uit de getekende dwarskrachtenlijn) zodat  $x = 3$  m.

$$M_{\max} = V_A x - \frac{1}{2} qx^2 = 11 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3^2 = 33 - 13,5 = 19,5 \text{ kNm}$$



52

52. Liggers uitsluitend belast door puntlasten

Als men enige vaardigheid heeft verkregen in het bepalen van dwarskrachten- en momentenlijnen kan men snel tot resultaten komen als men een bepaalde procedure volgt (basis-principe beschreven in 41. t/m 45.).

- a. Een en ander is uiteengezet voor een ligger op twee steunpunten, belast door drie puntlasten, (twee omlaag gericht en één omhoog).

De oplegreacties kunnen op de gebruikelijke manier worden bepaald en bedragen:

$$V_A = +15 \text{ kN} \quad V_B = -5 \text{ kN}$$

- b. In de tweede schets zijn alle krachten op de ligger aangegeven in de richting waarin ze aangrijpen. Er behoeft geen onderscheid te worden gemaakt tussen krachten en oplegreacties (zie ook 54.).

c. Bepaling van de dwarskrachtenlijn

- Werk van links naar rechts

- Zet de eerste verticale kracht uit in richting en grootte vanaf de nullijn. De waarde van de dwarskracht blijft constant tot de volgende puntlast wordt bereikt. De dwarskrachtenlijn is dus horizontaal.

- Zet nu vanaf deze horizontale lijn de tweede verticale kracht weer uit in richting en grootte, enz.

- Controle: aan het eind van de ligger moeten we weer op de nullijn terecht komen.

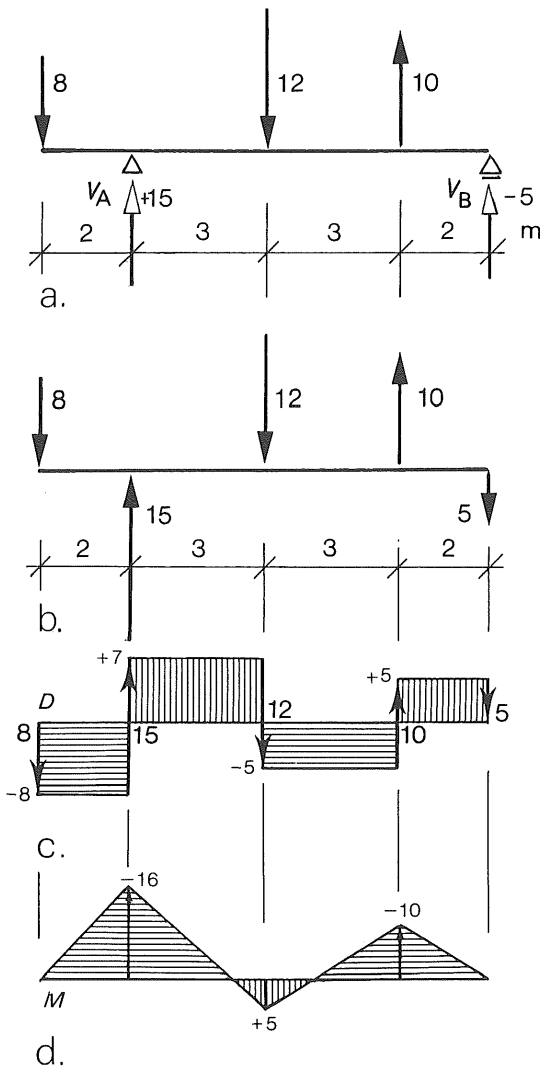
d. Bepaling van de momentenlijn

- Bepaal de oppervlakken van de opvolgende stukken van het dwarskrachtenvlak (dus steeds tussen twee puntlasten).

- Werk van links naar rechts, dan levert een positief stuk van het dwarskrachtenvlak ook een positief aandeel aan het buigende moment en een negatief stuk van het dwarskrachtenvlak een negatief aandeel aan het buigende moment.

- Tel alle bijdragen achtereenvolgens bij elkaar op en zet de waarde van het moment uit onder de rechtse puntlast van de twee waar het betreffende aandeel bijhoort.

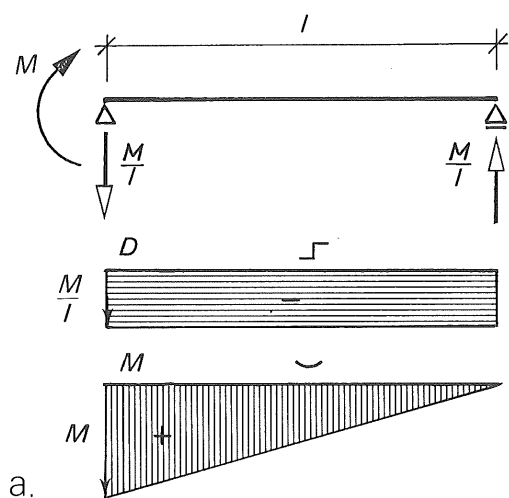
- Controle: onder de laatste puntlast op de ligger (dit kan dus ook een oplegreactie zijn) moet het buigende moment weer gelijk zijn aan nul.



NB: de gegeven regels gelden uitsluitend van links naar rechts gaande. Indien men van rechts naar links werkt geldt voor de D-lijn dat de richtingen van de puntlasten omgekeerd vanaf de nullijn moeten worden uitgezet en voor de M-lijn dat de tekens voor de momenten moeten worden verwisseld.



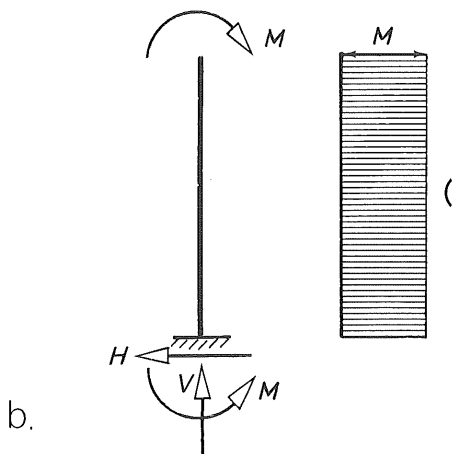
53

53. Liggers belast door uitwendige momenten

In de meeste voorbeelden is het moment onder de laatste puntlast (c.q. oplegreactie) gelijk aan nul en levert het eerste aandeel van het dwarskrachtenvlak direct het buigende moment onder de daaropvolgende puntlast.

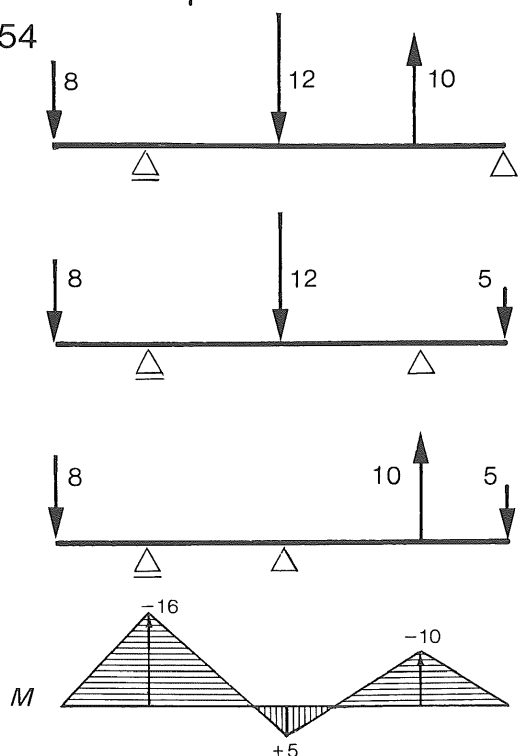
Grijpt op het einde van een ligger op twee steunpunten echter een uitwendig moment aan, dan dient men met deze waarde voor het momentenvlak te beginnen en kan dan op de gebruikelijke wijze verder gaan.

a.



b. Indien op een kolom uitsluitend een uitwendig moment  $M$  aangrijpt, geldt  $H_A = 0$ ,  $V_A = 0$  en  $M_A = M$ . De dwarskracht is gelijk aan nul over de gehele ligger en het moment blijft dus constant.

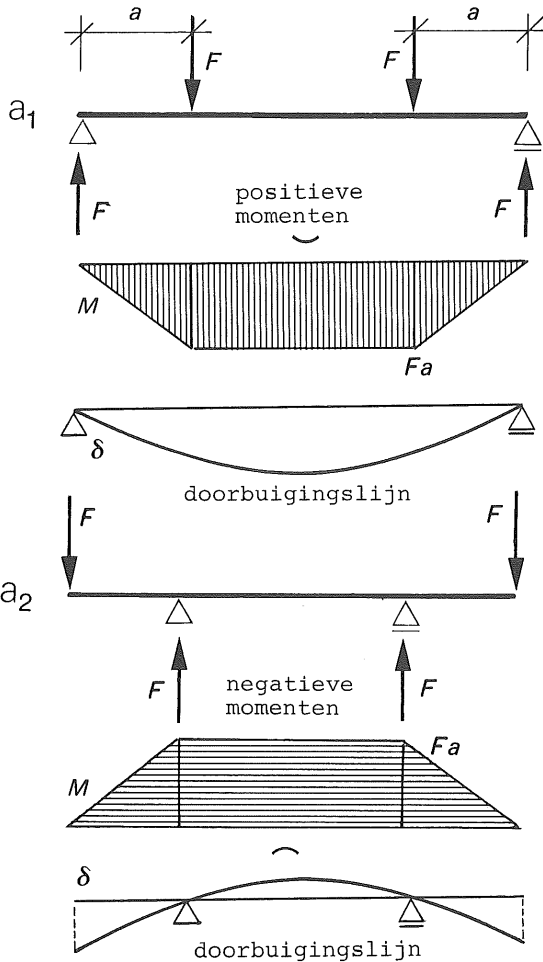
54

54. Verwisselbaarheid van puntlasten en oplegreacties bij liggers onder verticale belasting

Als bij een ligger op twee steunpunten, die is belast door een aantal puntlasten, de oplegreacties zijn bepaald met behulp van de evenwichtsvoorwaarden, doet het verder niet meer ter zake wat nu de puntlasten waren en wat de oplegreacties.

Zolang we de getalwaarden gelijk houden, kunnen we volkomen willekeurig de ondersteuningen aangebracht denken waar eerst twee puntlasten stonden en de oorspronkelijke oplegreacties als uitwendige krachten opvatten. De D- en M-lijnen ondergaan hierdoor geen enkele verandering. Als voorbeeld is de ligger gekozen die in 52. nader is uitgewerkt.

55

55. Omkeren van de belasting

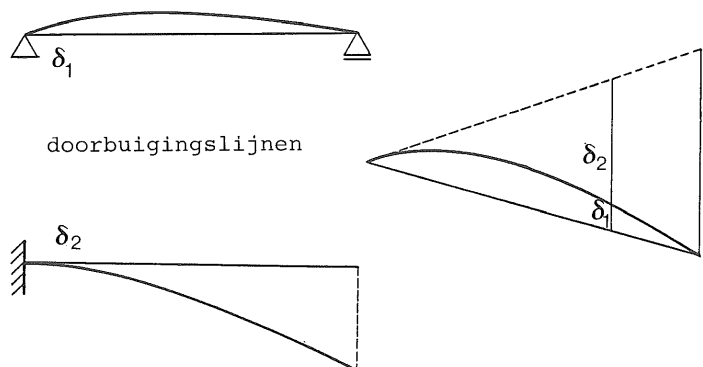
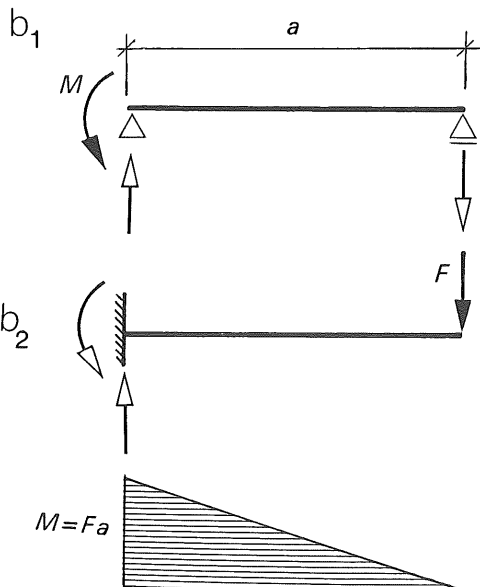
- a. Soms is het zinvol om alle krachten van teken te laten omkeren, zoals bij de geschetste liggers. De eerste versie is de gebruikelijke ligger op twee steunpunten, symmetrisch belast. De tweede een ligger met overstekken, eveneens symmetrisch belast. Het verloop van de momenten is voor beide gevallen volkomen analoog, alleen het teken van de momenten (en dwarskrachten) is verschillend, omdat ook de aangrijpende krachten tegengesteld van richting zijn.

Tengevolge van de belasting zal de ligger doorbuiger. Een schets van het doorbuigingsverloop (op sterk vergrote schaal) is nuttig als een controle op het gevonden momentenverloop.

Indien twee liggers hetzelfde momentenverloop hebben zullen ze ook dezelfde vervormingen ondergaan. De vorm van het doorbuigingsverloop is echter mede afhankelijk van de randvoorwaarden. Vergelijk de beide liggers onder a. en b. waarbij het momentenverloop geheel gelijkvormig is, het doorbuigingsverloop echter niet.

Ter plaatse van een rol of een scharnier zal de ligger niet zakken, ter plaatse van een zogenaamde volledige inklemming zal ook geen hoekverdraaiing optreden.

- b. Het is nuttig dat men zich realiseert dat een ligger op twee steunpunten, met als belasting een koppel ter plaatse van een der opleggingen, precies hetzelfde belastinggeval voorstelt als een aan één zijde ingeklemde ligger, belast door een puntlast op het andere uiteinde.



In het figuurtje geheel rechts is het vervormingsverloop op een twee maal zo grote schaal uitgezet. Afhankelijk van de keuze van de nullijn vindt men dan het doorbuigingsverloop voor ligger 1 of 2. Een analoge procedure vonden we reeds in 47. voor het bepalen van de momentenlijn.

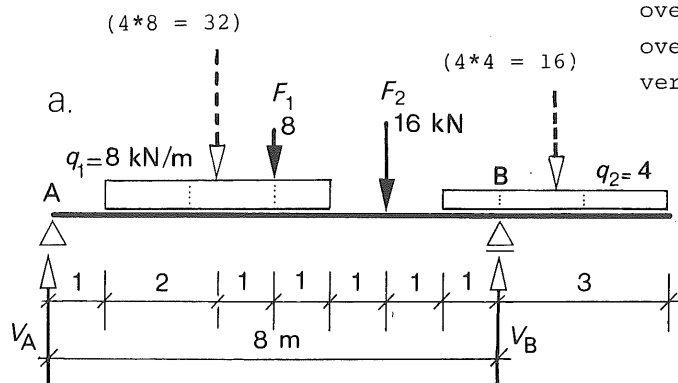
56

56. Puntlasten en gelijkmatig verdeelde belasting

Voor de meer eenvoudige gevallen wordt meestal gebruik gemaakt van het beginsel van superpositie zie 62. en 64.

Men kan ook het voorheen beschreven procédé van tweemaal integreren toepassen, zoals in 52. werd beschreven voor uitsluitend puntlasten.

- a. Voorbeeld: ligger op twee steunpunten met een overstek, belast door een aantal puntlasten en over bepaalde gedeelten ook met een gelijkmatig verdeelde belasting.

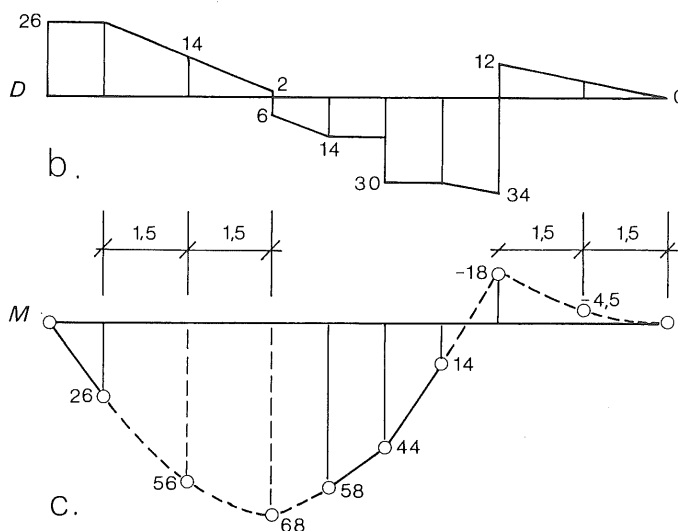


- b. Eerst wordt het dwarskrachtenvlak getekend.

In de gedeelten waar de dwarskracht lineair verloopt wordt het dwarskrachtenvlak in een aantal (liefst gelijke) moten verdeeld. Komt een puntlast voor over een gedeelte met gelijkmatig verdeelde belasting ( $F_1$ ) dan moet daar ter plaatse ook een scheidingslijn tussen twee moten worden aangebracht (stippellijntjes in fig. a).

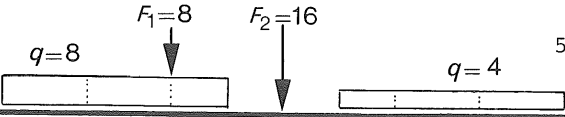
Per moot wordt het oppervlak van het dwarskrachtenvlak ( $A_D$ ) bepaald, zodat het juiste moment in een aantal punten bekend is.

- c. Over de gedeelten waar alleen gelijkmatig verdeelde belasting voorkomt verbindt men de gevonden punten door een vloeiende kromme (streeplijnen in fig. c). In de onbelaste gedeelten bestaat de momentenlijn uit rechte lijnen (getrokken lijnen in fig. c.).

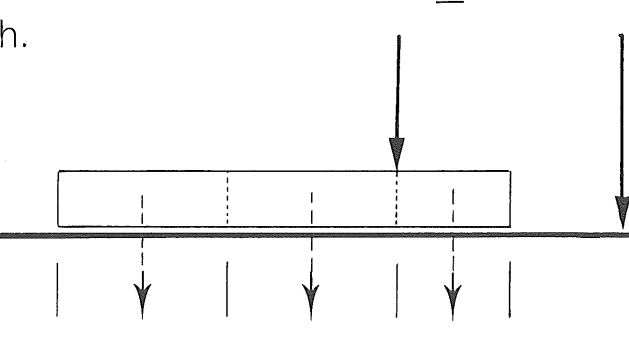
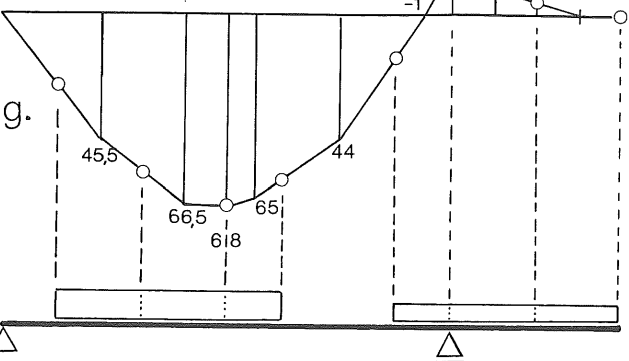
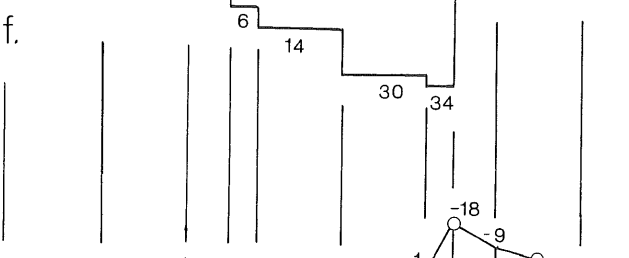
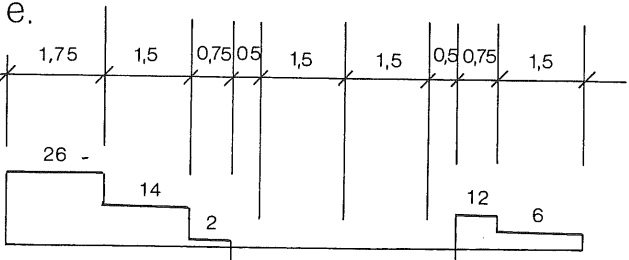
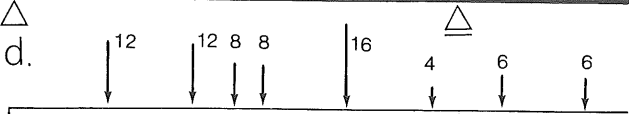


Als een puntlast voorkomt ter plaatse van de gelijkmatig verdeelde belasting dan vertoont de momentenlijn daar ter plaatse een knik. Wenst men de grootte van de knik precies te tekenen, dan kan beter de procedure volgens 57. worden gevolgd.

57\*



57. Variant voor de bepaling van de momenten



- d. De gelijkmatig verdeelde belasting is in hetzelfde aantal moten verdeeld als onder a. (Let op: scheidingslijn onder  $F_1$  aanbrengen).
- e. Alle belastingen zijn nu vervangen door puntlasten.
- f. De dwarskrachtenlijn wordt getekend alsof er alleen maar puntlasten op de ligger aangrijpen.
- g. De momentenlijn bestaat nu uitsluitend uit rechte gedeelten, de knikken in de momentenlijn liggen ter plaatse van de sprongen in het dwarskrachtenverloop. De getekende momentenlijn vormt een zeer goede benadering van het werkelijke momentenverloop. (Bij grafische oplossingen zal men vrijwel altijd volstaan met een dergelijke momentenlijn, zie 103.).

Uitgaande van de getekende momentenlijn bestaande uit rechte lijnen kan men echter ook zeer goed een vloeiend verloopende momentenlijn tekenen.

Hiertoe dient men het volgende te bedenken: als men het buigende moment in een doorsnede wenst te bepalen, kan men dit doen door van alle lasten links van deze doorsnede het statische moment op te maken. Hierbij mag men ook de resultante nemen van een of meerdere lasten zoals die op het linkerdeel werken. Dit betekent dat ter plaatse van een scheidingslijn tussen twee moten altijd het juiste moment wordt bepaald, en dit blijft ook gelden als de momentenlijn wordt bepaald door integratie, zoals voorheen beschreven.

- h. Ter plaatse van de scheidingslijnen tussen de moten kent men de juiste waarden van de momenten (met rondjes aangegeven in fig. g.), terwijl de getekende lijn tevens de raaklijn aan de werkelijke momentenlijn voorstelt.

- k. Met behulp van de voorgaande gegevens kan de vorm van de werkelijke momentenlijn met zeer goede benadering worden getekend. In fig. k is daartoe het linkerdeel van de momentenlijn uit fig. g. vergroot weergegeven.

58

58. Tekenen van momentenlijnen bij liggers onder gelijkmatig verdeelde belasting

In 60. t/m 70. wordt de superpositie van momentenlijnen behandeld. Indien men hierbij het maximale moment wil bepalen bij liggers onder gelijkmatig verdeelde belasting, moet de momentenlijn nauwkeurig op schaal worden getekend. Ook bij het optimaliseren van liggers is dit een vereiste, men kan dan vrij veel onaangenaam rekenwerk besparen, zie 71.

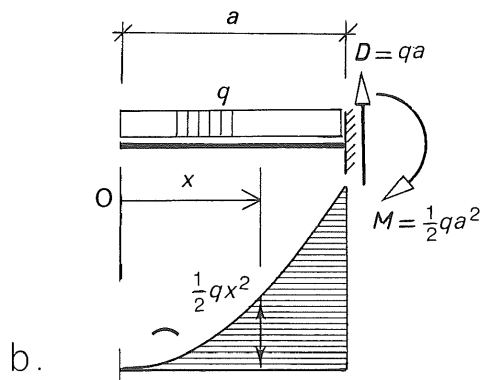
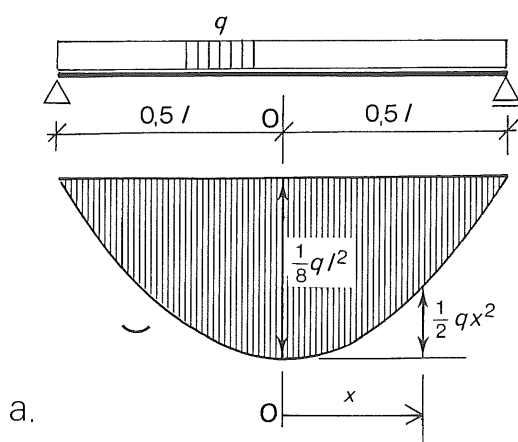
- a. Bij een ligger op twee steunpunten zonder overstekken geldt als formule voor de momentenlijn

$$M_x = \frac{1}{2} qx(1-x) \quad \dots (6)$$

Als men het assenkruis naar het midden van de ligger verplaatst gaat (6) over in:

$$M_x = \frac{1}{8} ql^2 - \frac{1}{2} qx^2 \quad \dots (6a)$$

Voor het uitzetten van de momentenlijn is deze laatste momentenlijn wat eenvoudiger. Men trekt op mm papier de nullijn op een afstand van  $ql^2/8$  boven de topwaarde van het moment die men bijv. juist op een cm-lijn aanneemt. Ten opzichte van deze lijn zet men dan voor enkele waarden van  $x$  (bijv. 1, 2, 3, 4 ... m) de waarde van  $qx^2/2$  naar boven uit, zie fig. c.



- b. Bij een aan één zijde volledig ingeklemde ligger geldt voor het momentenverloop

$$M_x = -\frac{1}{2} qx^2 \quad \dots (12a)$$

Dit momentenverloop kan dus op analoge wijze worden uitgezet als onder a.

De momentenlijn voor liggers met overstekken onder gelijkmatig verdeelde belasting kan uit de bovenstaande belastingsgevallen worden opgebouwd, zie 65. Andere mogelijkheden zijn gegeven in 59., 66. en 70.

- c. Het tekenen van de momentenlijn.

(numerieke uitwerking voor geval a.)

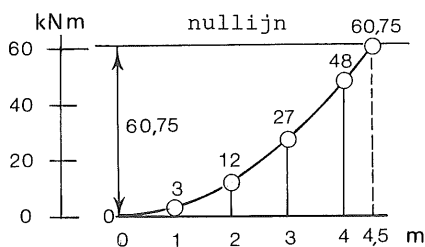
$$q = 6 \text{ kN/m}' \quad l = 9 \text{ m.}$$

$$\frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{8} * 6 * 81 = 60,75 \text{ kNm}$$

$$x = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \text{m}$$

$$x^2 = 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad \text{m}^2$$

$$\frac{1}{2} qx^2 = 3 \quad 12 \quad 27 \quad 48 \quad \text{kNm}$$



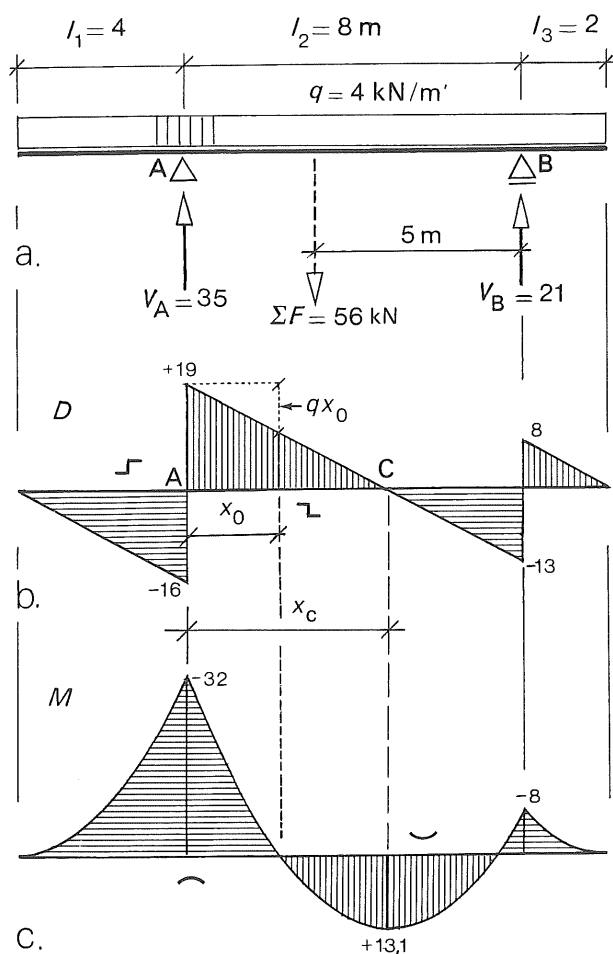
Een grafische methode voor het tekenen van een parabool wordt behandeld in 102.

59

59. Liggers met overstekken onder constante gelijkmatig verdeelde belasting

Bij een ligger met overstekken is de traditionele (en meest safe) manier:

- oplegreacties bepalen
- dwarskrachtenlijn tekenen
- in enkele markante punten het oppervlak van het dwarskrachtenvlak bepalen
- de hieruit volgende momenten in de beschouwde punten uitzetten en de momentenlijn schetsen



Voorbeeld:

Totale belasting

$$F = q \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 4 \cdot (4 + 8 + 2) = 56 \text{ kN}$$

Oplegreacties ( $\Sigma M_B = 0$  en  $\Sigma V = 0$ )

$$V_A \cdot 8 = \Sigma F \cdot 5 \quad V_A = \frac{5 \cdot 56}{8} = 35 \text{ kN}$$

$$V_B = 56 - 35 = 21 \text{ kN}$$

Uit de dwarskrachtenlijn volgt dat de dwarskracht gelijk is aan nul ter plaatse van A en B en op een afstand  $x_c$  rechts van A, waarbij geldt

$$x_c = \frac{19}{19+13} \cdot 8 \text{ m} = 4,75 \text{ m}$$

$$M_{\text{max}} = -32 + 0,5 \cdot 19 \cdot 4,75 = -32 + 45,1 = 13,1 \text{ kNm}$$

Het momentennulpunt ligt daar waar het oppervlak van het positieve dwarskrachtenvlak precies het oppervlak van het negatieve dwarskrachtenvlak opheft, (zie ook 72.). Wiskundig is deze oplossing wat minder plezierig. Stelt men de afstand van dit nulpunt tot A gelijk aan  $x_0$  dan volgt  $x_0$  uit fig. b:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 = 19 x_0 - \frac{1}{2} x_0 \cdot 4 x_0 \quad \text{ofwel}$$

$$2x_0^2 - 19x_0 + 32 = 0 \quad \rightarrow x_0 = 2,2 \text{ m}$$

In een geval als hiernaast geschetst is het echter gemakkelijker om een of twee tussengelegen punten van de momentenlijn te bepalen waarbij de plaats van het momentennulpunt dan voldoende nauwkeurig volgt uit de tekening.

Meestal worden dergelijke gevallen echter opgelost met behulp van het beginsel van superpositie, zie 65. en 66.

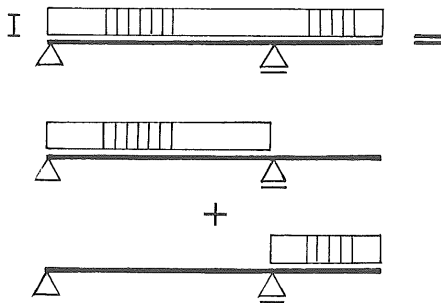
60

60. Superpositie

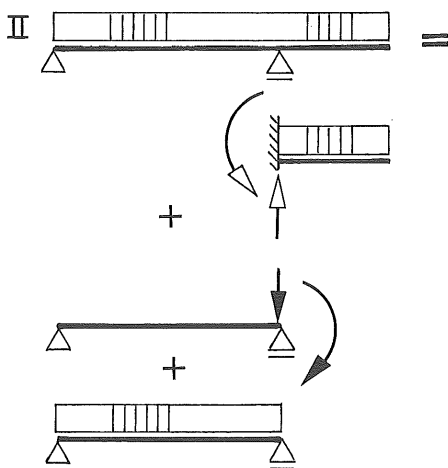
Het bepalen van dwarskrachtenlijnen en momentenlijnen door integratie volgens 41. en 44. levert voor elke ligger de juiste gegevens. De invloed van puntlasten en gelijkmatig verdeelde belasting wordt direct verwerkt, men heeft een controle op de juistheid van de uitgevoerde bewerkingen en de gegevens kunnen worden uitgezet ten opzichte van een horizontale nullijn.

In vele gevallen werkt het echter overzichtelijker om het gegeven probleem in een aantal eenvoudiger basisgevallen te splitsen en de invloeden hiervan achteraf op te tellen.

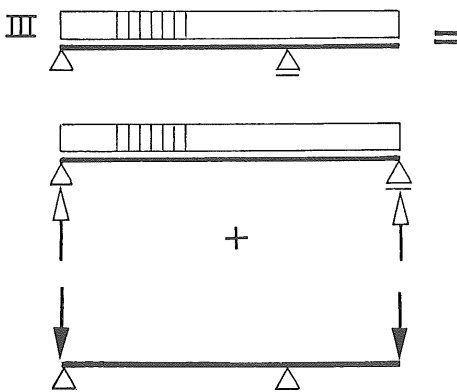
Er wordt een drietal methoden behandeld:

I Splitsen van de belastingen

De constructie zelf blijft ongewijzigd maar de belasting wordt in twee, hoogstens drie eenvoudiger gevallen gesplitst waarvoor men de momenten bepaalt, die achteraf op een bepaalde wijze worden opgeteld. De nullijn voor de momenten is dan niet langer recht, maar de momenten kunnen direct in verticale richting worden afgelezen, c.q opgemeten. De methode wordt besproken in 61. t/m 64. De lezer wordt ten sterkste aangeraden zich deze methode goed eigen te maken.

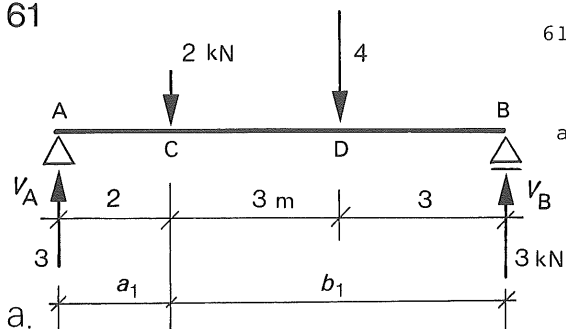
II Splitsen van de ligger in moten

Bij liggers met overstekken en liggers met dwarsstaven bestaat de mogelijkheid deze constructies als het ware in moten te verdelen en voor elke moot de krachtswerking na te gaan onder invloed van de daarop werkende belasting. Naderhand worden deze moten weer samengevoegd en wordt ook de interactie van de moten op elkaar in rekening gebracht. Voor statisch bepaalde liggers kan men i.h.a. beter methode I toepassen die minder omslachtig is. Bij statisch onbepaalde liggers (2<sup>e</sup> jaar) wordt deze methode echter zeer veel toegepast zodat het nuttig is zich de principes eigen te maken. De methode wordt behandeld in 65.

III Verplaatsen van de opleggingen

De bestaande opleggingen van de ligger worden vervangen door andere die ons beter uitkomen voor de berekening. Achteraf worden deze opleggingen dan weer geëlimineerd en de oorspronkelijke opleggingen weer ingevoerd. Dit blijkt een uitstekende methode voor het optimaliseren van liggers, dat wil zeggen het aanbrengen van de opleggingen op een zodanige plaats dat de momenten in de ligger zo klein mogelijk worden. De methode wordt besproken in 70. Het is in feite het analytisch equivalent van de grafische methode met poolfiguur en stangenveelhoek die wordt besproken in 101.

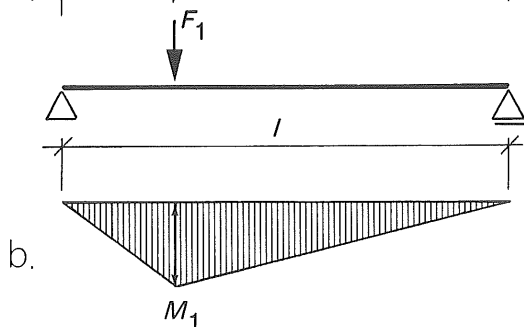
61

61. Superpositie bij momenten van gelijk teken

- a. Als voorbeeld wordt een ligger beschouwd die is belast door twee puntlasten. Als de oplegreacties bekend zijn, is het momentenvlak eigenlijk al direct te tekenen: zie fig. e.

$$M_C = +V_A a_1 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ kNm}$$

$$M_D = +V_B b_2 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ kNm}$$



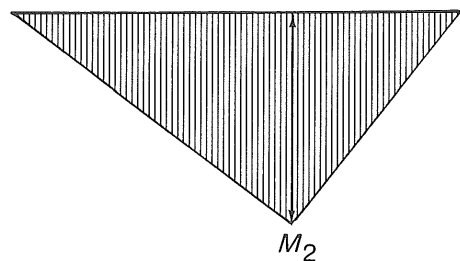
- b. Om het beginsel van superpositie te demonstreren wordt echter eerst de ligger beschouwd waarop alleen de puntlast  $F_1$  aangrijpt. Het maximum moment onder de puntlast is hierbij gelijk aan

$$M_1 = \frac{a_1 b_1}{l} F_1 = \frac{2 \cdot 4}{6} 2 = 3 \text{ kNm}$$

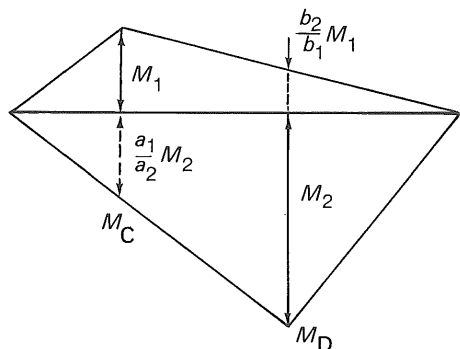
- c. De ligger alleen belast door  $F_2$  levert onder deze puntlast als maximum moment

$$M_2 = \frac{a_2 b_2}{l} F_2 = \frac{5 \cdot 3}{6} 4 = 7,5 \text{ kNm}$$

c.



d.

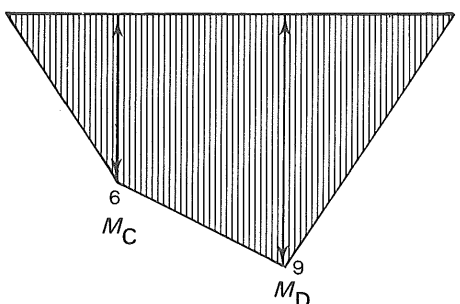


- d. Om beide momentenvlakken grafisch op te kunnen tellen wordt het momentenvlak voor  $F_1$  omgeklapt om de nullijn en boven het momentenvlak voor  $F_2$  geplaatst. De verticale afstand tussen de beide geknikte lijnen geeft dan het moment aan ten gevolge van  $F_1$  en  $F_2$  tezamen. Wil men de momenten weer ten opzichte van een horizontale nullijn uitzetten dan moet nog even worden opgemeten of berekend hoe groot de momenten  $M_C$  en  $M_D$  zijn.

$$M_C = M_1 + \frac{a_1}{a_2} M_2 = 3 + \frac{2}{5} 7,5 = 6 \text{ kNm}$$

$$M_D = M_2 + \frac{b_2}{b_1} M_1 = 7,5 + \frac{3}{4} 3 = 9 \text{ kNm}$$

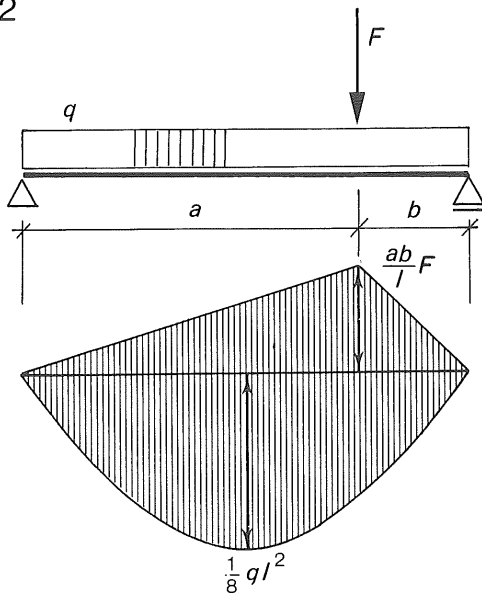
e.



- e. Momentenlijn traditioneel uitgezet..

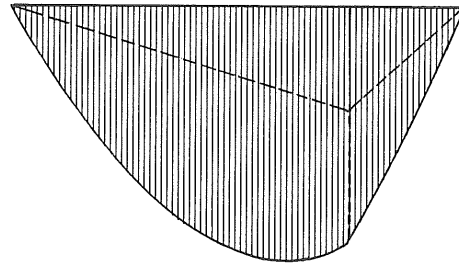


62



Momentenlijn gesuperponeerd

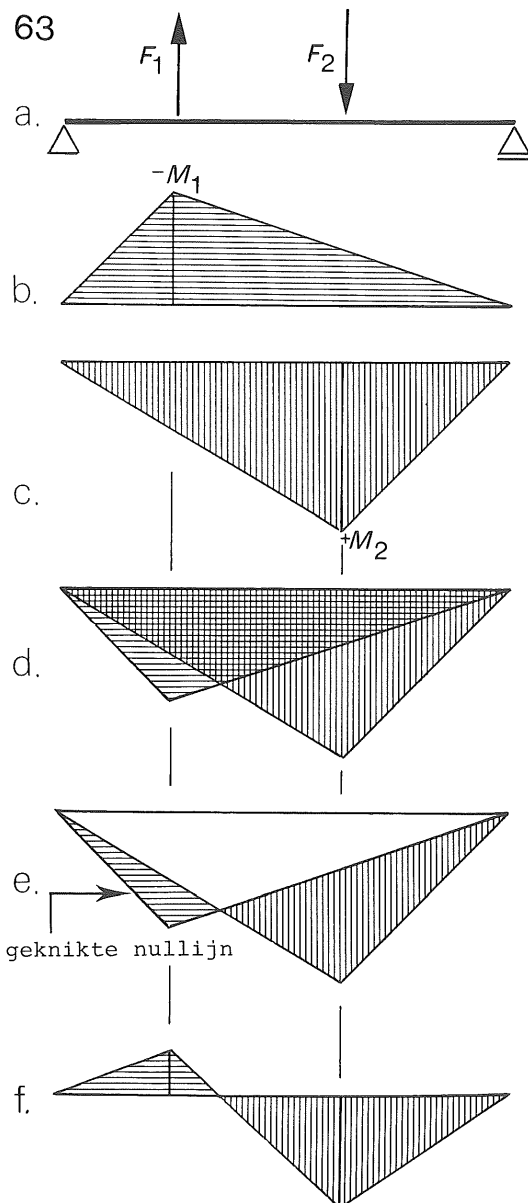
62. Puntlasten en gelijkmatig verdeelde belasting  
 Voor twee puntlasten in dezelfde richting wordt deze wijze van superponeren eigenlijk niet toegepast. Het heeft echter wel zin indien het momentenvlak moet worden bepaald voor enkele puntlasten tezamen met een gelijkmatig verdeelde belasting.



Momentenlijn traditioneel uitgezet

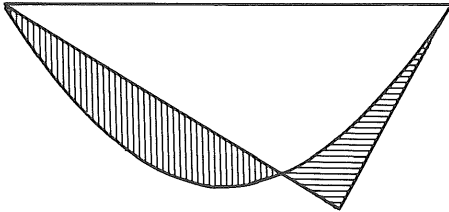
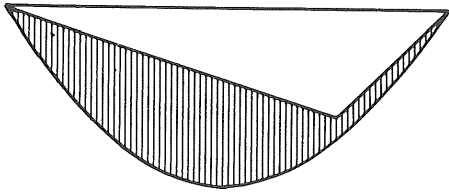
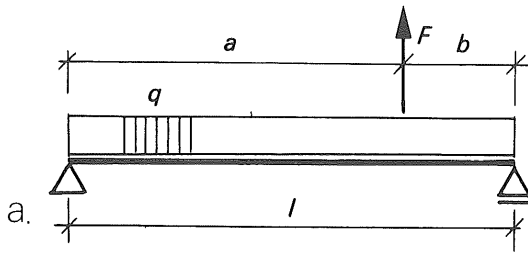
De afzonderlijke momentenlijnen zijn dan veel gemakkelijker te tekenen en het is dan ook direct duidelijk dat in de traditioneel getekende momentenlijn knikken moeten zitten ter plaatse van de puntlasten. In het voorbeeld is volstaan met het tekenen van één puntlast.

63



63. Superpositie bij momenten van ongelijk teken  
 Het superponeren van momentenvlakken wordt voornamelijk toegepast als de twee 'basismomenten' van ongelijk teken zijn. In zo'n geval wordt altijd het negatieve momentenvlak om de nullijn gewenteld.  
 a. In het voorbeeld is een ligger gekozen met twee tegengesteld gerichte puntlasten.  
 b. Het negatieve momentenvlak is horizontaal gearceerd.  
 c. Het positieve momentenvlak is verticaal gearceerd.  
 d. Als het negatieve momentenvlak om de horizontale as wordt gewenteld dan ontstaat een gedeelte met dubbele arcering waar de momenten elkaar opheffen.  
 e. Het is gebruikelijk deze dubbele arcering weg te laten en dit gedeelte van het momentenvlak blank te houden. De nullijn voor de momenten wordt nu gevormd door de geknikte lijn voor de negatieve momenten na wentelen, zoals gemakkelijk blijkt door  
 f. vergelijking met het traditioneel uitgezette momentenvlak.

64



64. Gelijkmatig verdeelde belasting en tegengesteld gerichte puntlast

Het gegeven voorbeeld is de tegenhanger van dat in 62. Het hangt nu volkomen van de grootte van de puntlast af of het momentenvlak alleen positieve waarden vertoont (fig. b) of zowel positieve als negatieve waarden (fig. c).

Door deze wijze van superponeren ziet men zeer goed wat de invloed is van beide aandelen van de belasting zodat men ook een beter begrip krijgt van de optredende momentenverdeling.

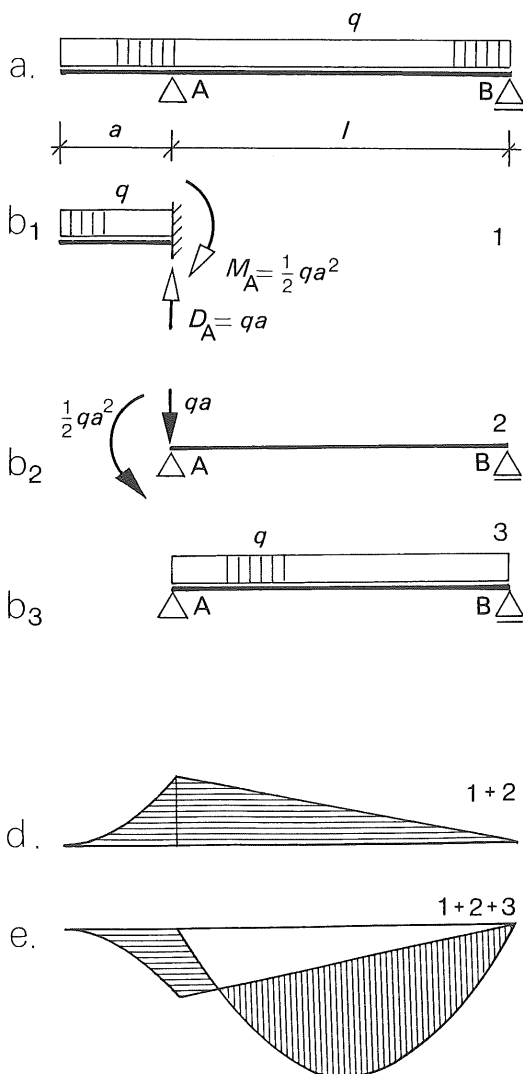
In geval b. bedraagt de grootte van de puntlast:

$$F_1 = \frac{3}{8} ql$$

In geval c. is de grootte van de puntlast verdubbeld:

$$F_2 = \frac{6}{8} ql$$

65



65. Superponeren door het splitsen van de ligger in een aantal moten

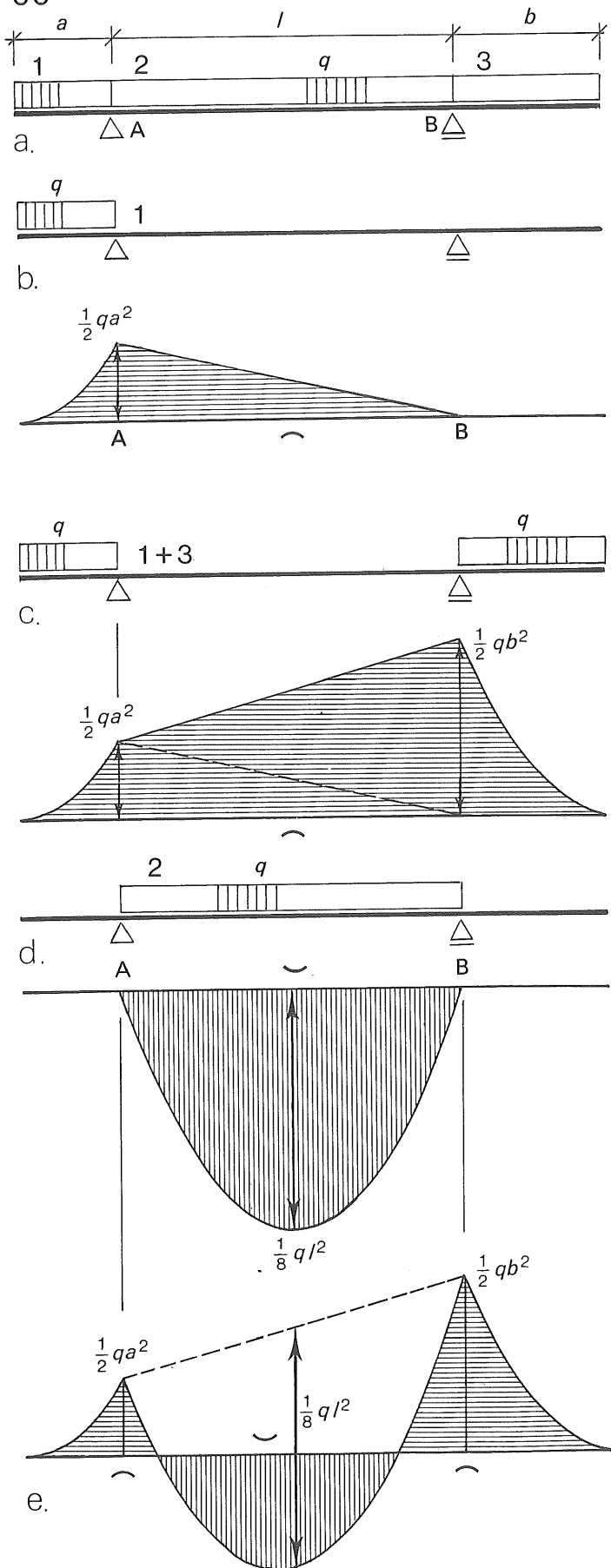
- De methode zal worden gedemonstreerd aan de hand van een ligger op twee steunpunten met een overstek en belast door een gelijkmatig verdeelde belasting.
- De scheiding tussen de moten wordt ter plaatse van de ondersteuning aangebracht.
  - Het overstek kan hierbij worden beschouwd als volledig ingeklemd te zijn in de ligger ter plaatse van A.
  - De dwarskracht  $D_A$  en het inklemningsmoment  $M_A$  van het overstek uit fig. b<sub>1</sub> worden nu als uitwendige belasting op de overigens onbelaste ligger AB aangebracht volgens het beginsel: actie = reactie.
  - Als laatste geval wordt dan ligger AB nogmaals beschouwd, maar nu alleen belast door de gelijkmatig verdeelde belasting.
- De drie basisbelastinggevallen zijn reeds besproken in 58. voor de  $q$ -last en in 53. voor het uitwendig aangrijpend moment.
- Bij het superponeren van de drie momentenlijnen kunnen de negatieve momenten volgens geval 1 en 2 rechtstreeks worden samengevoegd en gewenteld om de horizontale nullijn.
- Tezamen met geval 3 is dan de uiteindelijke momentenlijn verkregen.

Bij belastinggeval 2 (zie fig. b<sub>2</sub>) valt nog op te merken dat de uitwendige verticale kracht rechtstreeks door de oplegging wordt opgenomen en dus geen invloed heeft op het momentenverloop.

Het belastinggeval zoals gegeven in 53. heeft op zichzelf staand nauwelijks enige betekenis. Het is echter zeer belangrijk als men liggergedeelten weglaat die momenten op de resterende ligger overbrengen omdat dan het effect van de weggelaten liggerdelen correct wordt weergegeven.

In 66. wordt een overeenkomstig geval met twee overstekken behandeld volgens methode I, met dien verstande dat de momentenlijn nu niet door wentelen is verkregen maar dat is uitgegaan van een horizontale nullijn.

66



66. Superponeren door het splitsen van de belasting bij een ligger met overstekken

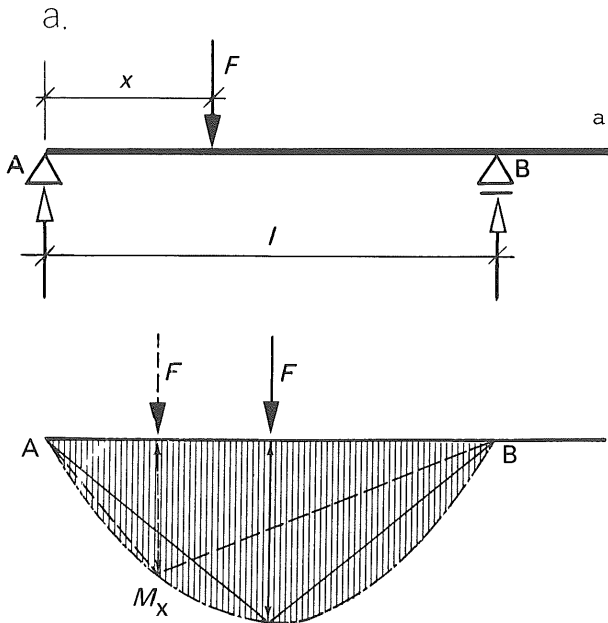
- De totale belasting wordt gesplitst in drie gevallen:
  - belasting op het linker overstek
  - belasting op het middendeel
  - belasting op het rechteroverstek
- Bij belastinggeval 1 is het moment ter plaatse van A gelijk aan  $M_A = -\frac{1}{2} qa^2$ . Het momentenverloop op het overstek is parabolisch. Tussen A en B is de ligger onbelast, het moment moet dus lineair verlopen tussen A en B en ter plaatse van B gelijk zijn aan nul.
- Voor het rechter overstek geldt een soortgelijke redenering. Het kost dan geen enkele moeite om de beide negatieve momentenvlakken ten gevolge van de belasting op de overstekken bij elkaar op te tellen.
- De belasting op het middendeel van de ligger geeft een parabolisch momentenverloop tussen A en B.
- Als variant op de voorheen beschreven methode van wentelen van het negatieve momentenvlak is in dit geval de momentenlijn op de traditionele manier uitgezet. Hiertoe wordt het negatieve momentenvlak volgens c. boven de nullijn gehandhaafd en het parabolvormige momentenverloop volgens d. wordt uitgezet ten opzichte van de stippellijn in fig. e. Het positieve momentenverloop wordt er als het ware 'tussengehangen'.

67\*

67. Variërende plaats van de puntlast

Tot nu toe is er in alle voorbeelden van uitgegaan dat de gegeven belasting steeds op dezelfde plaats blijft staan. Indien een puntlast echter deel uitmaakt van de veranderlijke belasting kan de puntlast overal op de ligger voorkomen.

Beschouwt men een ligger op twee steunpunten met een overstek waarop een mobiele puntlast aangrijpt dan dient men onderscheid te maken voor het geval dat de puntlast tussen de steunpunten aangrijpt en voor het geval dat de puntlast op het overstek aangrijpt.



a. Puntlast tussen de steunpunten

Het moment is steeds maximaal onder de puntlast en bedraagt:

$$M_x = \frac{F x(1-x)}{1} = \frac{F}{1} x(1-x) \quad \dots\dots (15)$$

In 38. werd voor een gelijkmatig verdeelde belasting ter grootte  $q$  gevonden:

$$M_x = \frac{1}{2} qx(1-x) \quad \dots\dots (6)$$

Beide momenten zijn gelijk indien men stelt

$$\frac{1}{2} q = \frac{F}{1} \quad \text{ofwel} \quad q = \frac{2F}{1}$$

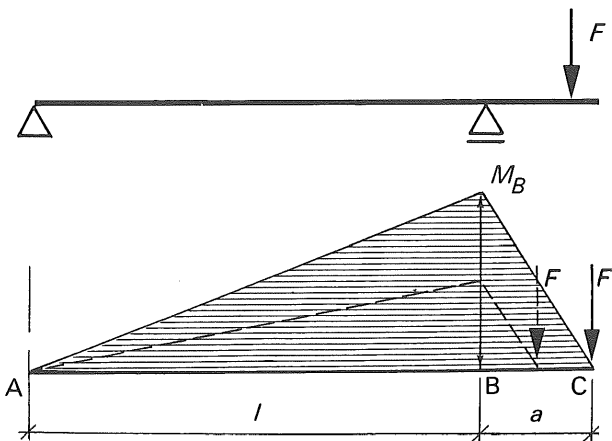
Met andere woorden: Het maximaal optredende moment onder een mobiele puntlast is overal gelijk aan het moment onder een gelijkmatig verdeelde belasting die een totale grootte  $2F$  heeft die gelijkmatig over de ligger is uitgesmeerd. Het verloop van het maximale moment is uiteraard paraboolvormig.

b.

b. Puntlast op het overstek

Een puntlast op het overstek veroorzaakt over de gehele ligger links van de puntlast een negatief moment. De ongunstigste toestand treedt op indien de puntlast geheel aan het eind van het overstek staat. De minimum momentenlijn heeft dus een driehoekig verloop met als topwaarde  $M_B = -Fa$ .

Over het algemeen worden dergelijke maximum- en minimum momentenlijnen ten opzichte van dezelfde nullijn uitgezet, zie bijv. 69.



68\*

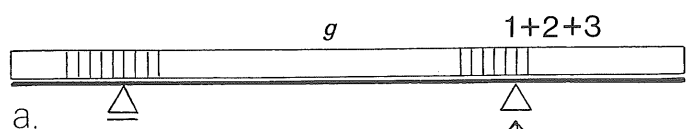
68. Maximum en minimum momentenlijnen onder gelijkmatig verdeelde belasting

Het belangrijkste belastinggeval is meestal de gelijkmatig verdeelde belasting, omdat het eigen gewicht en de rustende belasting altijd aanwezig is. De veranderlijke belasting kan al dan niet aanwezig zijn, bijv. meubels in een woning, mensen in een kamer bij een feestje of met z'n allen op het balkon bij een optocht.

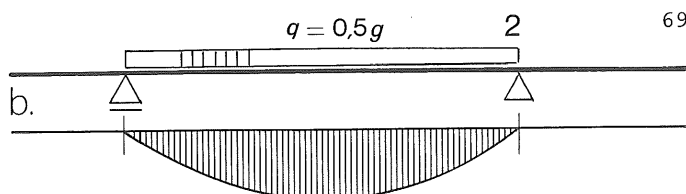
Over het algemeen wordt voor de veranderlijke belasting uitgegaan van een (betrekkelijk hoge) gelijkmatig verdeelde belasting. De grootte is voor een aantal veel voorkomende gevallen vermeld in de voorschriften (TGB). Deze gelijkmatig verdeelde belasting wordt aangebracht over het gehele veld (= liggerdeel tussen twee opleggingen) of over het gehele overstek.

Om de meest ongunstige waarden voor de momenten te vinden wordt de veranderlijke belasting zodanig aangebracht dat in het ene geval de positieve momenten in een veld of overstek zo groot mogelijk worden en in het andere geval de negatieve momenten zo groot mogelijk

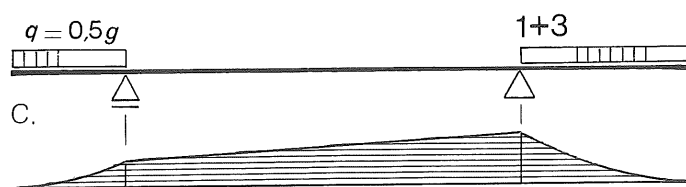
69\*



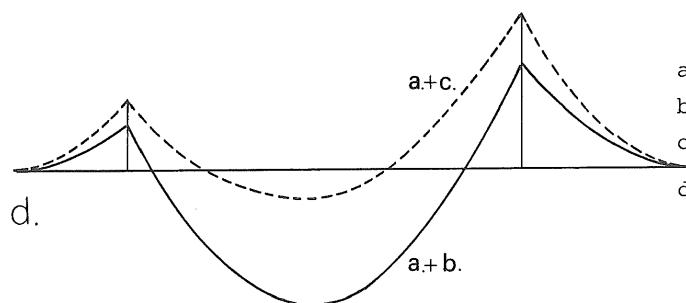
a.



b.



c.



d.

69. Maximum en minimum momentenlijnen bij een ligger met overstekken

Het voorbeeld is uitgewerkt voor de ligger die in 66. is behandeld.

Daar blijkt dat in het middenveld en de overstekken de maximale momenten optreden als alleen het middenveld is volbelast (geval 2). Voorts ziet men dat in het middenveld en de overstekken de minimale momenten optreden als alleen de overstekken zijn belast. (geval 1 + 3).

Het eigen gewicht is altijd aanwezig, hiervoor geldt het momentenverloop volgens 66. fig. e (geval 1 + 2 + 3).

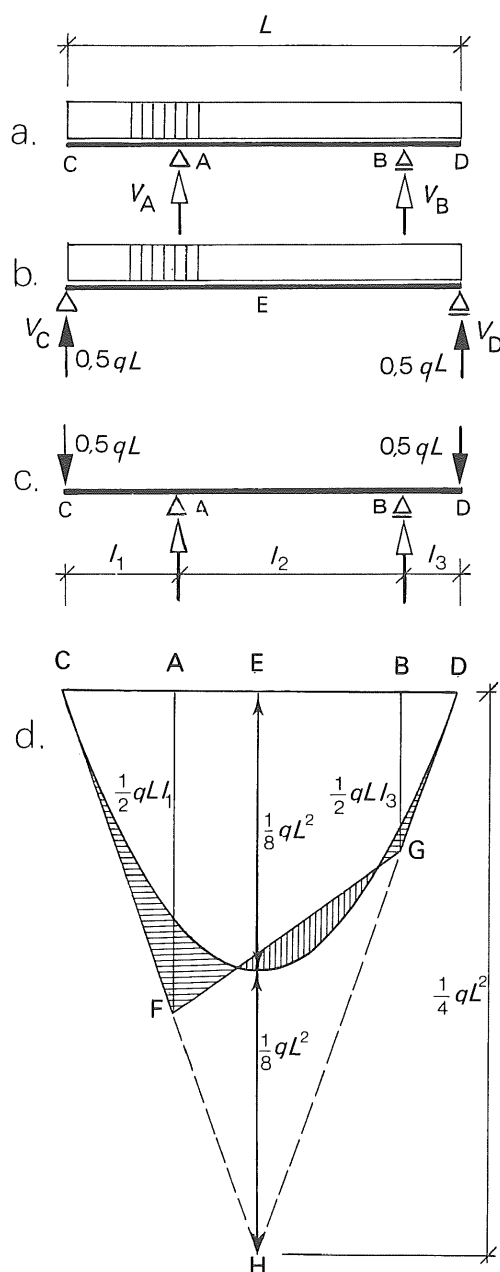
Om de ongunstigste momenten te vinden moeten dus worden beschouwd:

- de gehele ligger volbelast (eigen gewicht)
  - alleen middenveld volbelast (verand. bel.)
  - alleen overstekken volbelast (verand. bel.)
- d. Men moet dus bij elkaar optellen:

geval a. + b. voor de maximale momenten  
geval a. + c. voor de minimale momenten

In fig. d. is een en ander uitgewerkt voor het geval dat de veranderlijke belasting gelijk is aan de helft van het eigen gewicht ( $q = 0,5 g$ ).

70



70. Superponeren door het verplaatsen van de opleggingen

Wie voldoende ervaring heeft opgedaan in het superponeren kan nog een stap verder gaan en de oplegreacties verplaatsen. Het principe wordt weer uiteengezet aan de hand van een ligger met twee overstekken onder gelijkmatig verdeelde belasting.

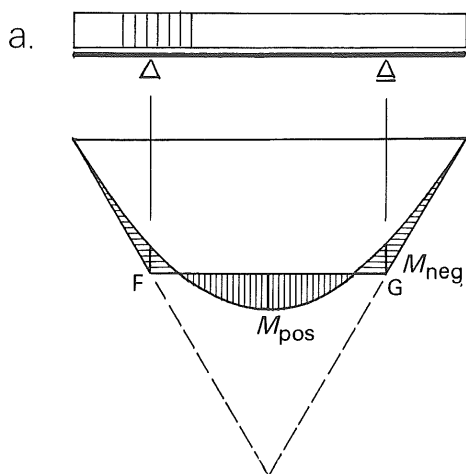
- De oorspronkelijke ligger is ondersteund in  $A$  en  $B$ .
- Deze ondersteuning worden verwijderd en de ligger wordt uitsluitend ondersteund aan beide einden waarbij direct duidelijk is dat beide oplegreacties gelijk zijn aan  $\frac{1}{2}qL$  en het maximale moment in het midden van de overspanning gelijk aan  $M_E = \frac{1}{8}qL^2$ .
- Om de oplegreacties  $V_C$  en  $V_D$  weer kwijt te kunnen raken wordt een onbelaste ligger beschouwd die in de oorspronkelijke punten  $A$  en  $B$  is ondersteund en waarop uitsluitend neerwaarts gerichte krachten ter grootte  $\frac{1}{2}qL$  aangrijpen ter plaatse van de uiteinden  $C$  en  $D$ . Ook hiervan is de momentenlijn direct te tekenen omdat alle momenten lineair verlopen en de momenten boven de steunpunten  $M_A = -\frac{1}{2}qLl_1$  en  $M_B = -\frac{1}{2}qLl_3$  kunnen worden bepaald zonder zelfs maar de oplegreacties behoeven te berekenen.
- Zowel geval b. als geval c. is onderling in evenwicht, superpositie van beide gevallen moet dus de momentenverdeling van de oorspronkelijke ligger opleveren. Bij dit superponeren wordt het negatieve momentenvlak volgens c. weer volgens de regels om de horizontale nullijn gewenteld. De takken  $CF$  en  $DG$  van de negatieve momentenlijn vormen de raaklijnen aan de parabool in de punten  $C$  en  $D$  die elkaar snijden in een punt  $H$  dat een momentenwaarde  $M_H = \frac{1}{4}qL^2$  bezit ter plaatse van het midden van de ligger met lengte  $L$ . De snijpunten van deze beide raaklijnen met de werklijnen van de reactiekrachten  $V_A$  en  $V_B$  bepalen dan de derde tak  $FG$  van de negatieve momentenlijn.
- Het voorgaande houdt in dat men met de getekende parabool en zijn twee raaklijnen in  $C$  en  $D$  voor elke willekeurige plaats van de ondersteuning het momentenverloop in de ligger kan bepalen, uitsluitend door het trekken van de sluitlijn ( $FG$ ) voor de negatieve momenten. De equivalente grafische oplossing wordt gegeven in 101.

71

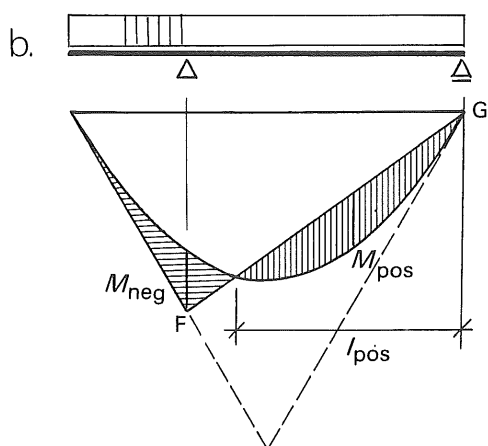
71. OptimaliserenGrafische methode

Onder het optimaliseren van een ligger zal hier worden verstaan dat de steunpunten zodanig worden aangebracht dat de extreme momenten in de ligger zo klein mogelijk blijven, zodat  $M_{\max} = |M_{\min}|$ . Het zal duidelijk zijn dat men in vele gevallen de plaats van de ondersteuning niet vrij kan kiezen. Zodra men echter wel enige keuzevrijheid heeft kan een gunstige plaats van de opleggingen enerzijds materiaal besparen en anderzijds de doorbuigingen beperken.

De onder 70. besproken wijze van superponeren blijkt uitermate geschikt te zijn voor het optimaliseren van een ligger. De parabool voor de gelijkmatig verdeelde belasting moet dan zorgvuldig worden getekend, zie 58. De sluitlijn FG van de negatieve momentenlijn kan dan proberenderwijs worden ingetekend. Men meet even na of inderdaad  $M_{\text{pos}} = M_{\text{neg}}$ . Is dit niet het geval dan verplaatst men de werklijnen voor de oplegreacties in de juiste richting en controleert opnieuw.



- a. Bepalen van de minimale positieve en negatieve momenten bij een ligger met twee overstekken. Men kiest de werklijnen van de ondersteuning op een willekeurige symmetrische plaats en tekent de sluitlijn van de momentenlijn. Als de extreme negatieve momenten in absolute waarde groter zijn dan het positieve moment dan verplaatst men de werklijnen wat meer naar buiten; zijn ze kleiner dan verplaatst men de werklijnen naar binnen.



- b. Ligger met een overstek aan één zijde (belastinggeval bij het oppakken van een heipaal). Men kan op overeenkomstige wijze te werk gaan als bij geval a. Het maximale positieve moment treedt op halverwege de afstand  $l_{\text{pos}}$ .

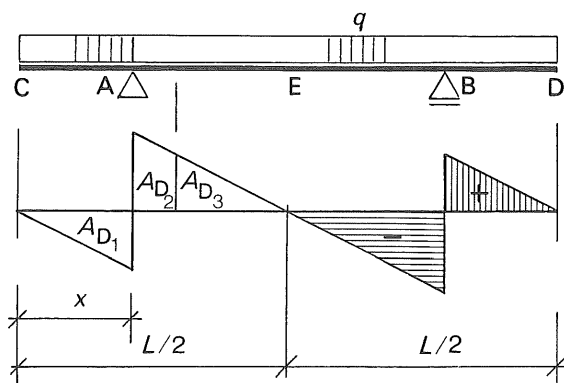


72\*

72. OptimaliserenAnalytische methode

De analytische methode wordt uitsluitend ter wille van de volledigheid gegeven. Ze is veel minder overzichtelijk dan de grafische methode en de kans op vergissingen is veel groter. De beste manier is wellicht door gebruik te maken van het dwarskrachtenvlak.

a.



a. Symmetrische ligger met overstekken

Het dwarskrachtenvlak kan direct worden getekend omdat het gelijk aan nul moet zijn in de punten C en D (vrije uiteinden van de ligger) en punt E (symmetriepunt). Voorts is de helling van de dwarskrachtenlijn overal bekend ( $q \text{ kN/m}^2$ ).

Het negatieve moment ter plaatse van A is gelijk aan  $A_{D1}$ , het moment is gelijk aan nul als geldt  $A_{D1} = A_{D2}$  en het maximale moment in E bedraagt

$$M_E = -A_{D1} + A_{D2} + A_{D3}.$$

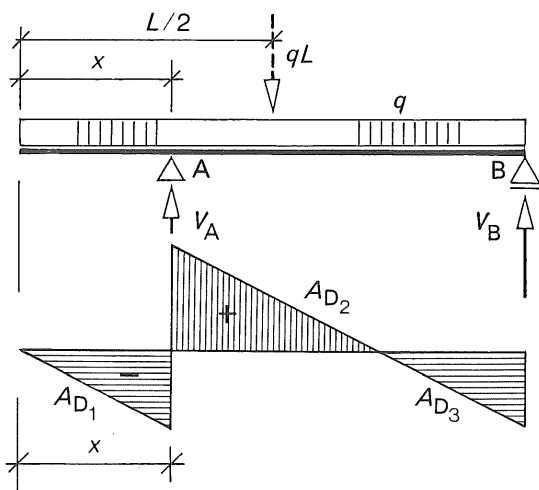
Stelt men de eis dat de absolute waarden van  $M_A$  en  $M_E$  gelijk moeten zijn dan moet dus gelden:

$$A_{D2} + A_{D3} = 2 |A_{D1}|$$

Nu geldt  $A_{D1} = \frac{1}{2} qx^2$   $A_{D2} + A_{D3} = \frac{1}{2} q(\frac{L}{2} - x)^2$  zodat de voorwaarde wordt:

$$\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 = 2x^2 \quad \text{ofwel} \quad x = \frac{L/2}{1+\sqrt{2}}$$

b.



b. Ligger met één overstek

Om de dwarskrachtenlijn te kunnen tekenen, moet eerst één oplegreactie worden berekend. Maakt men het statisch moment op om punt A dan volgt:  $+qL(\frac{L}{2} - x) - V_B(L - x) = 0$  ofwel

$$V_B = qL \frac{L/2 - x}{L - x}$$

Om te zorgen dat het maximale moment even groot is als het minimale moet gelden dat  $A_{D1} = A_{D3}$

Uit deze voorwaarde volgt de afstand x.

In dit geval kan men ook rechtstreeks de figuur voor de belaste ligger beschouwen. Men ziet dan dat  $M_A = -\frac{1}{2} qx^2$ . Voor de bepaling van het maximale positieve moment wordt gebruik gemaakt van formule (15), zie 51.

$$M_{\max} = \frac{V_B^2}{2q} = \frac{1}{2} qL^2 \left(\frac{L/2 - x}{L - x}\right)^2$$

Stelt men de absolute waarden van beide momenten aan elkaar gelijk dan volgt na worteltrekking:

$$x = L \frac{L/2 - x}{L - x} \quad \text{ofwel} \quad x^2 - 2Lx + \frac{L^2}{2} = 0$$

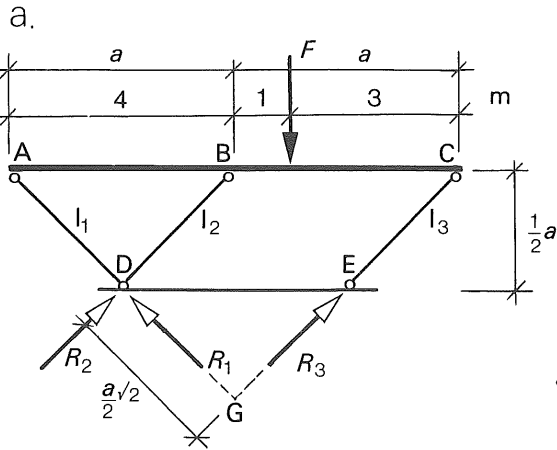
$$x_{1,2} = \frac{2L \pm \sqrt{4L^2 - 2L^2}}{2} = \frac{L}{2}(2 \pm \sqrt{2})$$

(de positieve wortel voldoet niet)

73

73. N-, D- en M-lijn voor een ligger met pendelstijlen

Bij een ligger met pendelstijlen is het verloop van de snedekrachten dikwijls wat minder doorzichtig dan bij de gebruikelijke ligger op twee steunpunten. Allereerst dienen de krachten in de pendelstijlen te worden bepaald op een van de manieren die in 26. en 27. zijn aangegeven. Vervolgens wordt elke reactiekracht ontbonden in een component evenwijdig aan en loodrecht op de liggeras. De diagrammen voor de snedekrachten kunnen dan op een van de gebruikelijke wijzen worden bepaald (zie bijv. 37). Het bepalen van dwarskrachtenlijnen en momentenlijnen zal men bij voorkeur uitvoeren door integratie (zie bijv. 52.)



a. Ligger ondersteund door drie scheefstaande pendelstijlen en belast door een verticaal werkende puntlast.

Bepaling van de reactiekrachten:

$$\Sigma M_D = 0: +F \cdot 3 - R_3 \cdot 2\sqrt{2} = 0 \quad R_3 = \frac{3}{2\sqrt{2}}F = \frac{3}{4} F\sqrt{2}$$

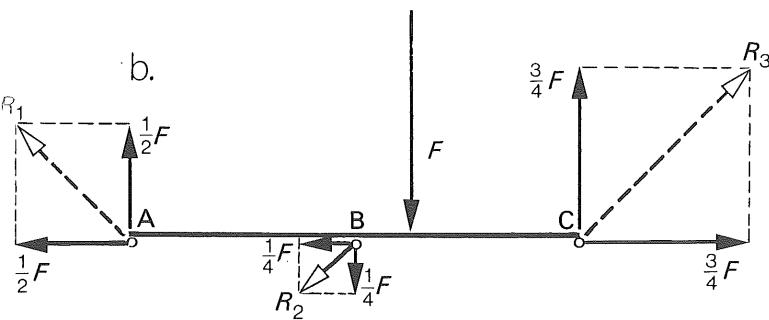
$$\Sigma M_G = 0: +R_2 \cdot 2\sqrt{2} + F \cdot 1 = 0 \quad R_2 = \frac{-F}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} F\sqrt{2}$$

$$\Sigma V = 0: -\frac{1}{2} R_2\sqrt{2} - \frac{1}{2} R_1\sqrt{2} - \frac{1}{2} R_3\sqrt{2} + F = 0$$

ofwel :  $R_1 + R_2 + R_3 = F\sqrt{2}$

$$R_1 = +F\sqrt{2} - R_2 - R_3 =$$

$$= +F\sqrt{2} + \frac{1}{4} F\sqrt{2} - \frac{3}{4} F\sqrt{2} = \frac{1}{2} F\sqrt{2}$$



Het teken van de reactiekrachten geeft aan of ze in de juiste richting zijn aangenomen of niet. Positieve reactiekrachten betekenen echter druk in de pendelstijlen, zodat de normaalkrachten in de pendelstijlen het tegengestelde teken hebben van de reactiekrachten.

Reactiekrachten

Staaftkrachten (pendelstijlen)

$$R_1 = + \frac{2}{4} F\sqrt{2}$$

$$S_1 = - \frac{2}{4} F\sqrt{2} \quad (\text{druk})$$

$$R_2 = - \frac{1}{4} F\sqrt{2}$$

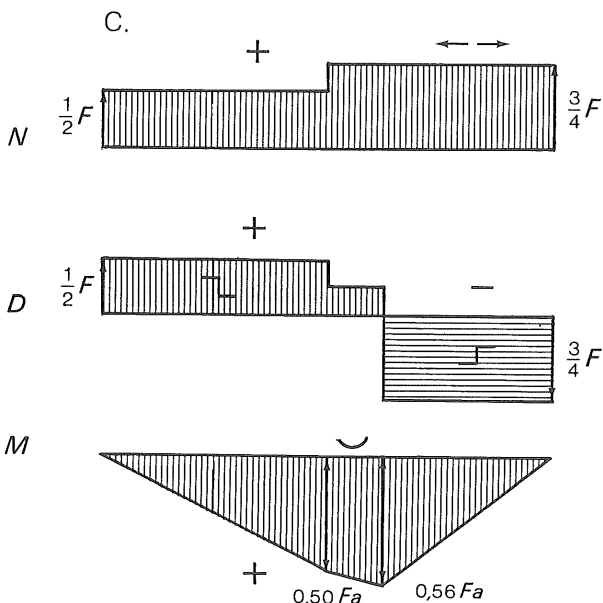
$$S_2 = + \frac{1}{4} F\sqrt{2} \quad (\text{trek})$$

$$R_3 = + \frac{3}{4} F\sqrt{2}$$

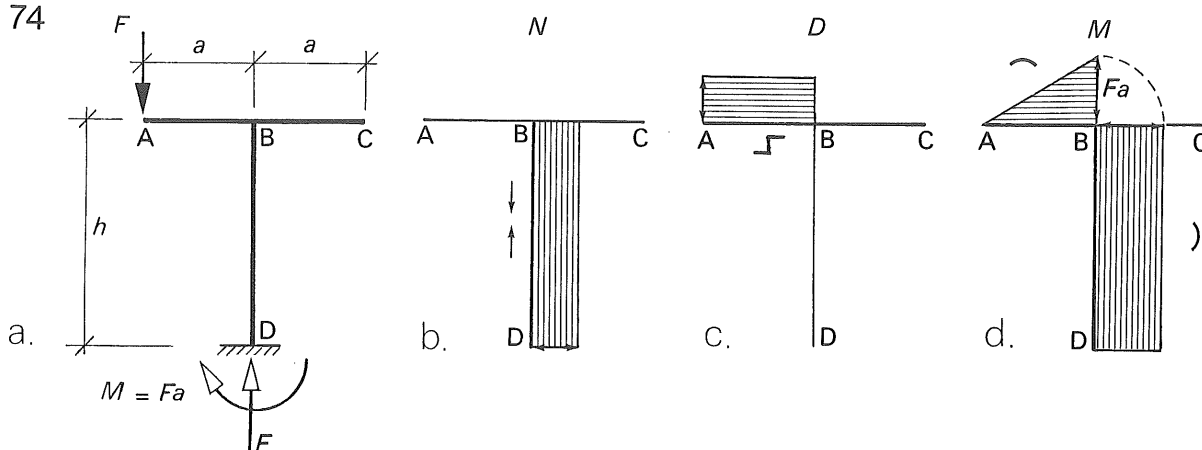
$$S_3 = - \frac{3}{4} F\sqrt{2} \quad (\text{druk})$$

b. De pendelstijlen geven de reactiekrachten gewoon door aan de ligger, zodat de krachten  $R_1$ ,  $R_2$  en  $R_3$  de getekende grootte en richting hebben. De drie krachten  $R$  worden elk ontbonden in hun verticale en horizontale component.

c. Voor het tekenen van de N-, D- en M-lijn bestaan nu geen principiële moeilijkheden meer. Men dient echter zorgvuldig te werk te gaan om vergissingen te voorkomen. Bepaal daarom het momentenvlak bij voorkeur door integratie van het dwarskrachtenvlak zodat men de controle heeft dat het buigende moment zowel in A als in C gelijk is aan nul.

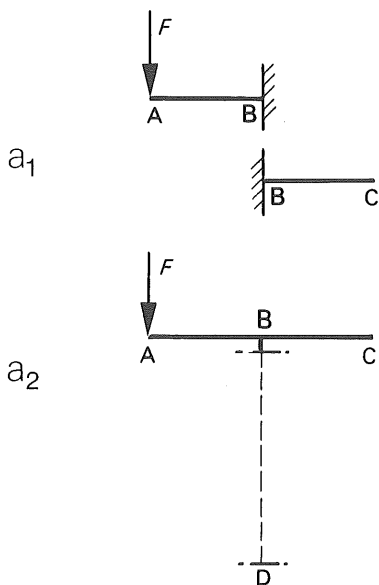


74



74. Kolom met dwarsstaaf;  
puntlast op één overstek

Indien liggers of kolommen van dwarsstaven zijn voorzien die onderling niet met elkaar zijn verbonden, blijft de constructie statisch bepaald en kan met de gebruikelijke middelen worden berekend. Enige oplettendheid is echter geboden bij de punten waar de staven op elkaar aansluiten.

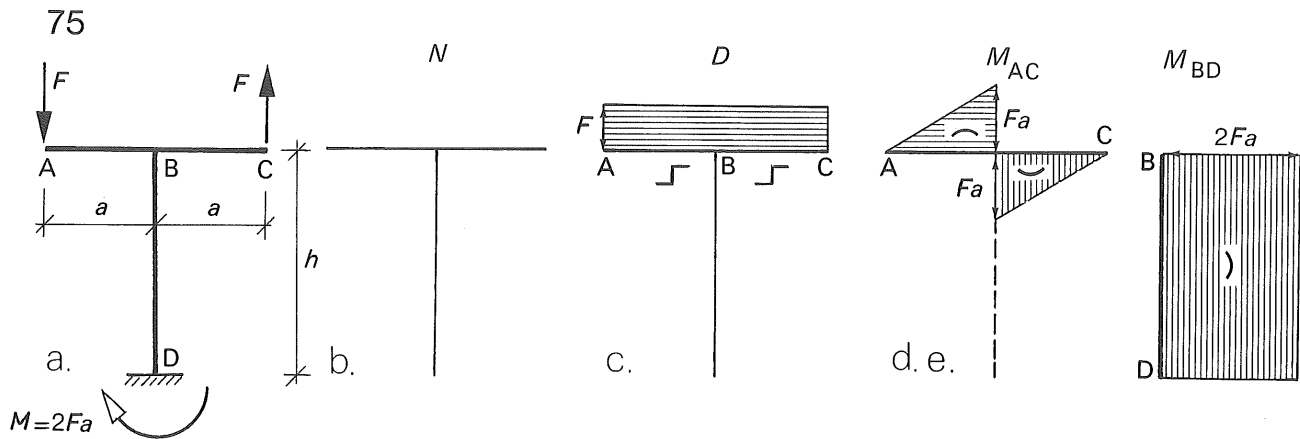


- a. De oplegreacties van de getekende constructie kunnen op de gebruikelijke manier worden bepaald met behulp van de drie evenwichtsvoorwaarden:  $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$  en  $\Sigma M = 0$ .
- a<sub>1</sub> Voor de bepaling van de N-, D- en M-lijnen worden de staven AB en BC elk in punt B ingeklemd gedacht.
- a<sub>2</sub> Voor de kolom BD brengt men achtereenvolgens direct onder B en direct boven D een snede aan. Voor elk van deze gevallen gaat men na wat het afgesneden gedachte stuk van de constructie voor krachten op deze sneden uitoefent.

b. Bepaling van de N-lijn  
De staven AB en BC brengen geen normaalkracht over. In staaf BD is de normaalkracht constant en gelijk aan  $N = -F$  (druk).

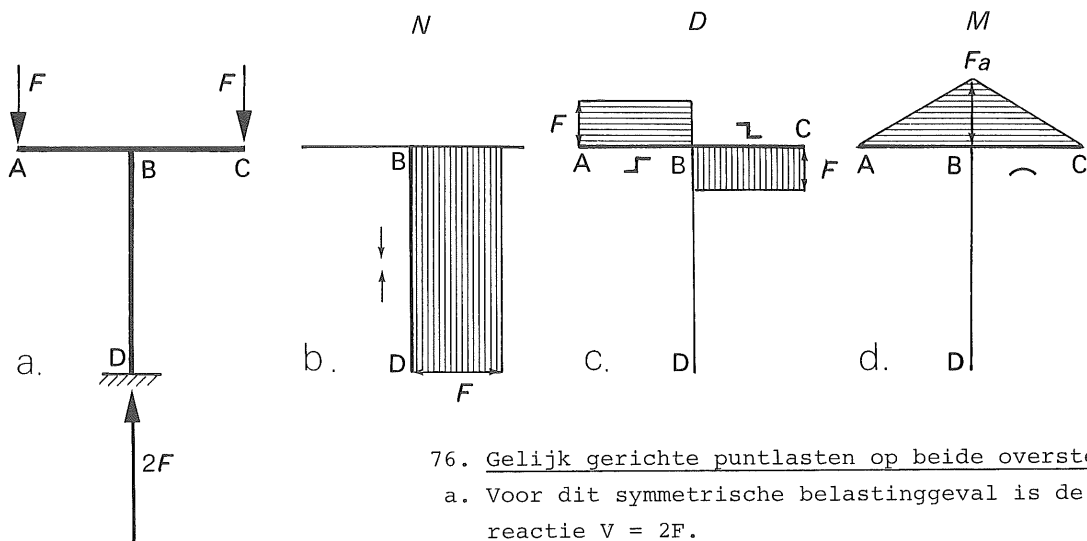
c. Bepaling van de D-lijn  
De dwarskracht in AB is constant en gelijk aan  $D = -F$ . De dwarskracht in het onbelaste staafgedeelte BC is gelijk aan nul. De dwarskracht in BD is eveneens gelijk aan nul, aangezien er geen krachten loodrecht op de kolomas werken. Volgt men de weg ABD waarlangs de uitwendige kracht F naar de inklemming in D moet worden overgebracht dan blijkt de dwarskracht in AB over te gaan in een even grote normaalkracht in BD.

d. Bepaling van de M-lijn  
In staaf AB verloopt het moment lineair met  $M_B = -Fa$ . In kolom BD blijft het moment constant  $M = Fa$  omdat de uitwendige kracht F evenwijdig is aan de kolomas. Het teken van het moment in AB is negatief volgens de regels van 33. Over het teken van het moment in een verticale staaf is echter geen eenduidige uitspraak te doen. Het is echter gebruikelijk in zo'n geval om het moment  $M = -Fa$  dat in punt B als het ware 'om de hoek loopt' ter weerszijden van het hoekpunt hetzelfde teken te laten houden. Het zal duidelijk zijn dat de vorm van het buigteken eenduidig bepaald is onafhankelijk van de keuze van het + of - teken.



75. Tegengesteld gerichte puntlasten op de overstekken
- Voor dit belastinggeval is de enige reactie een koppel  $M = 2Fa$ .
  - Bepaling van de N-lijn  
De staven AB en BC brengen geen normaalkracht over. In de kolom BD heffen de invloeden van de twee krachten  $F$  elkaar precies op zodat ook hier  $N = 0$ .
  - Bepaling van de D-lijn  
De dwarskracht heeft zowel over AB als over BC een negatieve waarde,  $D = -F$ . In kolom BD treedt uiteraard weer geen dwarskracht op.
  - Bepaling van de M-lijn  
In AB is het lineair verlopende moment negatief en in BC positief, zoals ook direct uit de buigtekens volgt. Hieruit mag men echter niet concluderen dat deze beide momenten elkaar in de kolom BD wel zullen opheffen. Brengt men immers in BD een snede aan dan werken via AB en BC twee gelijke en tegengesteld gerichte krachten op de beschouwde snede die dus een koppel ter grootte  $2Fa$  moet overbrengen. De beide buigende momenten in de horizontale staven versterken elkaar dus in de verticale staaf (kolom). Het buigend moment in BD is als negatief aangegeven naar analogie van de situatie in fig. d van 74. In dit geval hadden we het moment met even veel recht positief kunnen noemen. Het buigteken is weer eenduidig bepaald.
  - Regel voor het tekenen van de momentenlijn  
Tekent het buigteken in het momentenvlak. Zet het momentenvlak dan zodanig uit ten opzichte van de nullijn dat de holle zijde van het buigteken naar de nullijn wijst.

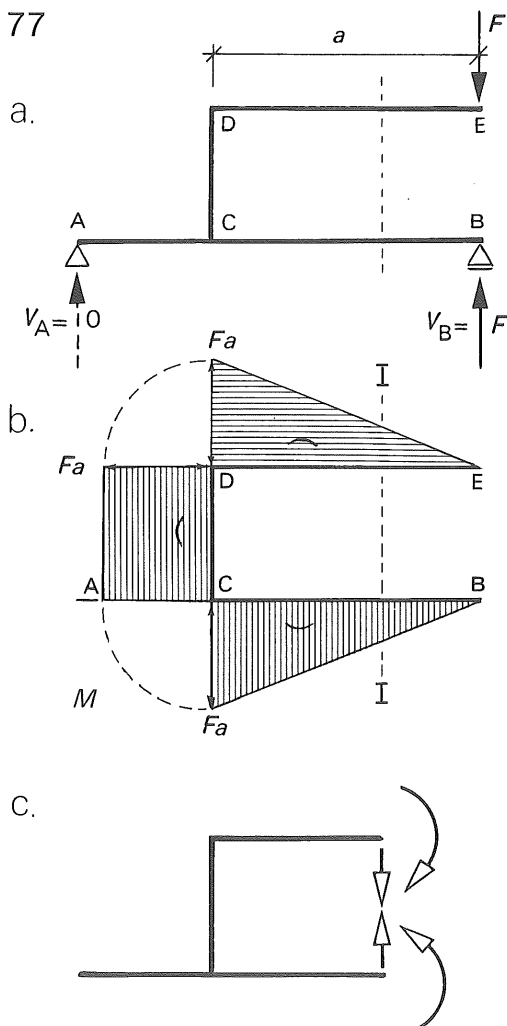
76



76. Gelijk gerichte puntlasten op beide overstekken

- Voor dit symmetrische belasting geval is de enige reactie  $V = 2F$ .
- Bepaling N-lijn  
Beide krachten  $F$  moeten via de staaf  $BD$  naar de oplegging worden afgevoerd, de drukkracht in deze staaf bedraagt dus  $2F$ .
- Bepaling D-lijn  
Dwarskrachten treden alleen op in de staven  $AB$  en  $BC$ , ze zijn even groot en hebben tegengestelde tekens.

77

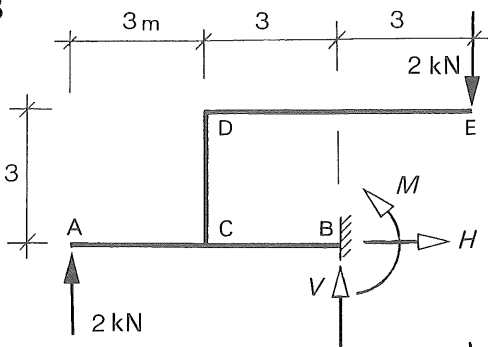


- Bepaling M-lijn  
De buigende momenten in de staven  $AB$  en  $BC$  zijn beide negatief en verlopen beide driehoekig. Nu doet zich het tegenovergestelde geval voor als in fig. d. in 75. Deze negatieve buigende momenten versterken elkaar niet in  $BD$  maar maken juist evenwicht met elkaar. Dit betekent dat men in dergelijke gevallen altijd weer eerst een snede in de beschouwde staaf moet maken (hier dus in  $BD$ ) en dan moet nagaan welk uitwendig moment de krachten op het afgesneden deel op deze snede uitoefenen.

77. Ligger op twee steunpunten, waarop een puntlast aangrijpt, verticaal boven oplegging B.

- Maakt men het momentenevenwicht op om  $B$ , dan blijkt dat  $V_A = 0$ . Het liggergedeelte  $AC$  doet dus niet mee aan de krachtswerking. (Verplaatst men  $F$  in horizontale richting dan treedt in punt  $A$  natuurlijk wel een reactiekracht op). De momentenlijn spreekt voor zich zelf.
- Brengt men een verticale snede  $I-I$  aan door het gedeelte  $CB$  van de ligger die ook de staaf  $DE$  snijdt dan blijkt dat de som van de momenten in beide horizontale staven gelijk is aan nul.
- Dit wordt nog duidelijker als men de snedekrachten tekent die in  $dsn I-I$  werken.

78

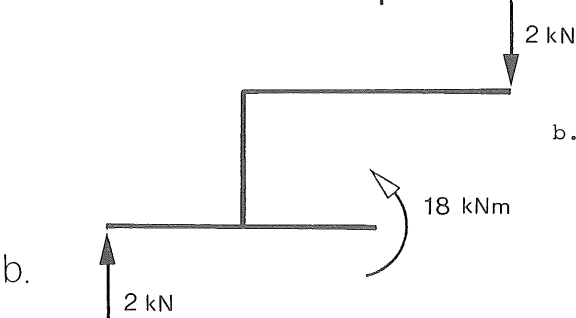


a.

78. Ingekleemde ligger met L-vormige dwarsstaaf

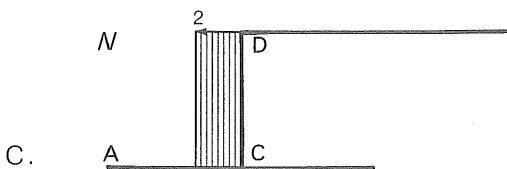
Een dergelijke combinatie van staven heeft op zichzelf geen reële betekenis, maar wordt uitsluitend behandeld om enige vaardigheid te verkrijgen voor andere gevallen die in het 3<sup>e</sup> trimester worden behandeld.

a. De oplegcracties kunnen op de gebruikelijke wijze worden bepaald. In dit speciale geval blijkt dat  $H = 0$  en  $V = 0$ .



b.

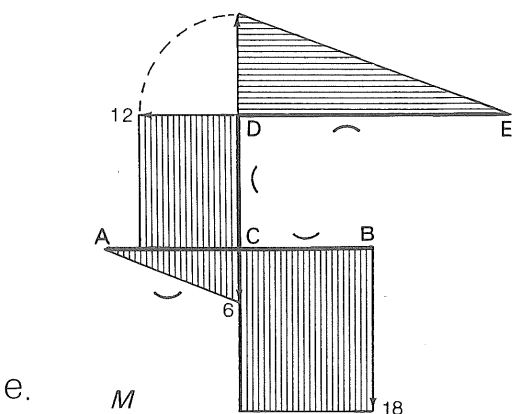
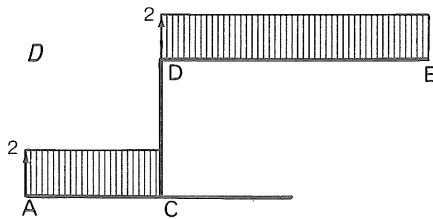
b. De constructie wordt overgetekend met de twee uitwendige krachten, elk van 2 kN, en de enige reactiekracht  $M = 18$  kNm.



c.

c.d. Men kan nu van elk vrij staafeinde uitgaande de N-, D- en M-lijnen gaan tekenen. Zoals te verwachten gaan in punt D de N-lijn en de D-lijn weer in elkaar over bij het passeren van de rechte hoek. Bij toeval gaat dit ook op voor punt C. Indien echter ook een dwarskracht door de oplegging moet worden overgebracht dan is de enige controle dat in zo'n knooppunt verticaal evenwicht moet heersen.

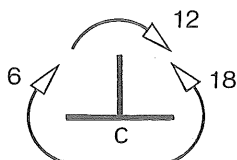
d.



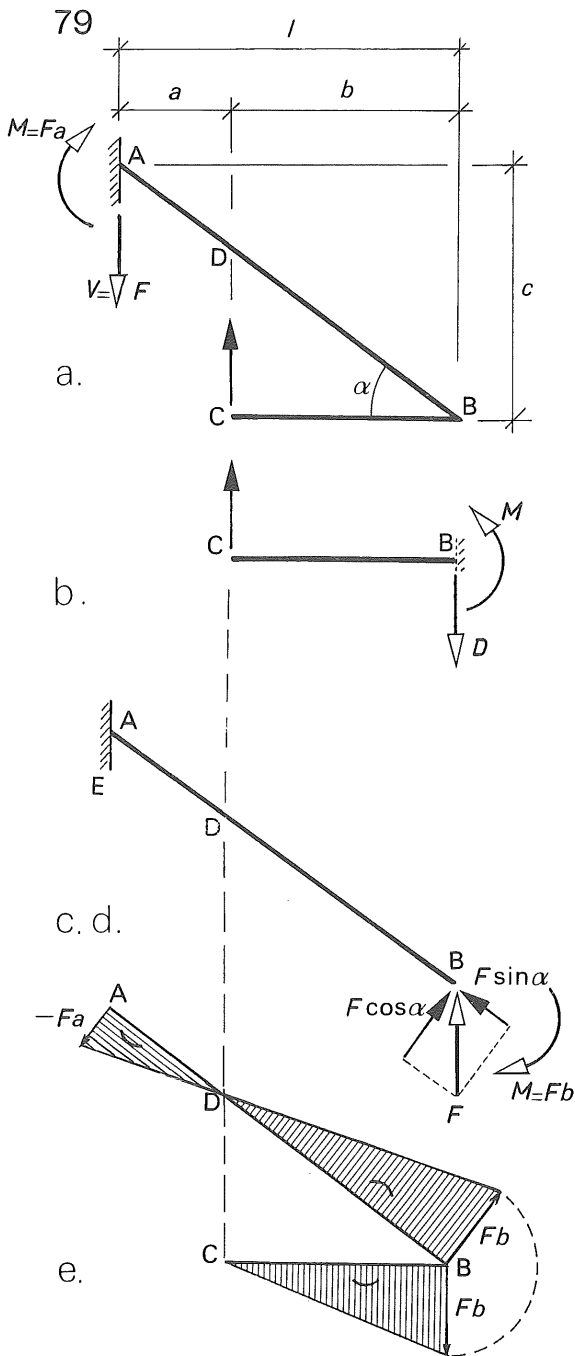
e.

e. Bij de momenten loopt het moment in punt D weer 'om de hoek' omdat er slechts twee staven samenkomen. In punt C treden echter sprongen in het momentenverloop op.

f.



f. Ter controle kan men dan zo'n punt met een stukje van de aangrenzende staven afzonderlijk beschouwen. De momenten die deze staven namelijk op het knooppunt uitoefenen moeten met elkaar in evenwicht zijn, zie fig. f. Als momentenevenwicht voor punt C geldt:  $+6 + 12 - 18 = 0$ .



79. Twee aaneensluitende staven onder een willekeurige hoek

a. De oplegreacties kunnen op de gebruikelijke manier worden bepaald. In een dergelijk geval is een splitsing van de constructie in twee aparte staven wat meer zinvol.

b. Staaf CB wordt in B volledig ingeklemd gedacht. De reacties zijn dan gelijk aan:

$$D_B = +F \quad \text{en} \quad M_B = +Fb$$

c. Het schuine staafgedeelte is in A ingeklemd en wordt in B belast door een verticale kracht  $F$  en een moment  $Fb$ , waarvan de richtingen volgen uit fig. b. door toepassing van het beginsel actie = reactie

d. Voor de bepaling van de  $N$ - en  $D$ -lijn van de staaf AB kan men  $F$  ontbinden langs de staafas en loodrecht daarop. Men vindt dan:

$$N_{AB} = -F \sin \alpha \quad D_{AB} = -F \cos \alpha$$

e. Voor de bepaling van het buigende moment in staaf AB is het gemakkelijker om de ontbinding van  $F$  in punt B maar te vergeten en de oorspronkelijke kracht  $F$  in punt B weer te gebruiken (zie fig. c,d). Bepaalt men het buigende moment in punt D, verticaal boven C gelegen, dan volgt:

$$M_D = +Fb - M_B = +Fb - Fb = 0$$

(Dit is nog gemakkelijker te zien als men het gehele deel DBC beschouwt).

Aangezien het moment in B en D bekend is en lineair moet verlopen, kan de momentenlijn voor AB worden getekend. Uiteraard vindt men dan in A de reeds berekende waarde  $M_A = Fa$  die nu als negatieve waarde moet worden ingevoerd vanwege de in 75. onder e gegeven regel voor het tekenen van de momentenlijn. Daarom in dergelijke gevallen altijd het buigteken in het momentenvlak aangeven.

Wil men ook voor het momentenverloop in AB blijven werken met de krachten loodrecht op en evenwijdig aan de staafas dan volgt bijv. voor het inklemmingsmoment in A:

$$M_A = +M_B - F \cos \alpha |AB| = +Fb - F \cos \alpha \cdot \frac{a+b}{\cos \alpha} = -Fa$$

80. Algemene regels voor de berekening van liggers met dwarsstaven

- Teken de constructie met de daarop werkende krachten en oplegreacties in richting en grootte.
- Bepaal per staaf de doorsnedegrootheden vanaf het vrije uiteinde naar binnen werkend.
- Indien twee aansluitende staven onder een rechte hoek samen komen gaat de N-lijn van de ene staaf over in de D-lijn van de andere staaf en omgekeerd.
- Bij twee aaneensluitende staven - onverschillig onder welke hoek - is het moment ter weerszijden van het knooppunt gelijk. Het teken van het moment wordt voor beide staven gelijk gehouden en gebaseerd op het teken voor de horizontale staaf.
- Bij het tekenen van de momentenlijn wordt het momentenvlak bij de geknikte staaf bij beide staven aan binnen- of buitenzijde van de staaf gehandhaafd. Tekent men het buigteken in het momentenvlak dan blijft de holle zijde van het buigteken steeds naar de liggeras gericht.
- Indien drie staven samenkomen moet voor de verticaal staande of schuine staaf een keuze worden gemaakt voor het teken van het moment. Bij het uitzetten van de momentenlijn dient men er zorg voor te dragen dat het buigteken (dat in het momentenvlak wordt getekend) met de holle zijde naar de nullijn (= staafas) blijft wijzen.
- Bij een samenkomen van drie staven is een controle van het verticale evenwicht en het momenten evenwicht aan te raden.

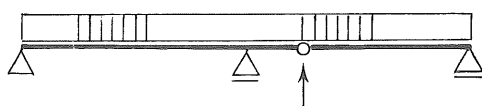
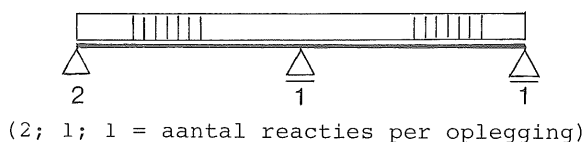


81

## 81. Aanpak van de berekening

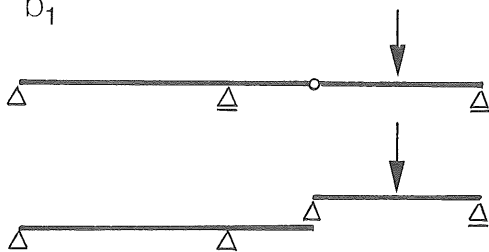
Indien een ligger drie ondersteuningen bezit, bijv. een scharnier en twee rolopleggingen, dan zijn er vier onbekende oplegreacties terwijl er maar drie evenwichtsvergelijkingen ter beschikking staan om deze onbekenden op te lossen. De constructie is statisch onbepaald geworden en er is een vormveranderingsvergelijking nodig om het probleem op te lossen. (Voor het geschetste eenvoudige geval zal dat reeds in het 2<sup>e</sup> trimester mogelijk blijken, meer algemeen komt het pas in het 2<sup>e</sup> jaar aan de orde).

a.

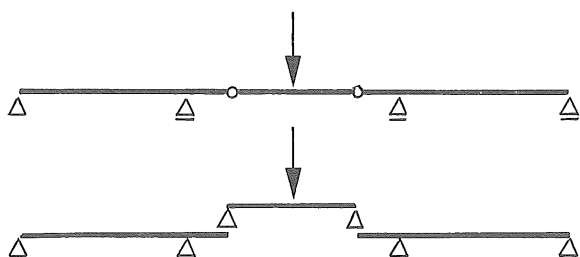


Het scharnier levert één extra evenwichtsvergelijking

- a. De constructie kan echter weer statisch bepaald worden gemaakt door het aanbrengen van een scharnier ergens in de ligger. Analytisch betekent dit dat er een extra vergelijking aan de drie evenwichtsvoorwaarden kan worden toegevoegd. Beschouwt men immers het liggergedeelte links of rechts van dit nieuwe scharnier dan is het moment van alle krachten op het linker of rechter gedeelte ten opzichte van dit punt gelijk aan nul.

b<sub>1</sub>

Bij elk tweetal liggers getekend onder b<sub>1</sub> en b<sub>2</sub> is de krachtwerking precies dezelfde.

b<sub>2</sub>

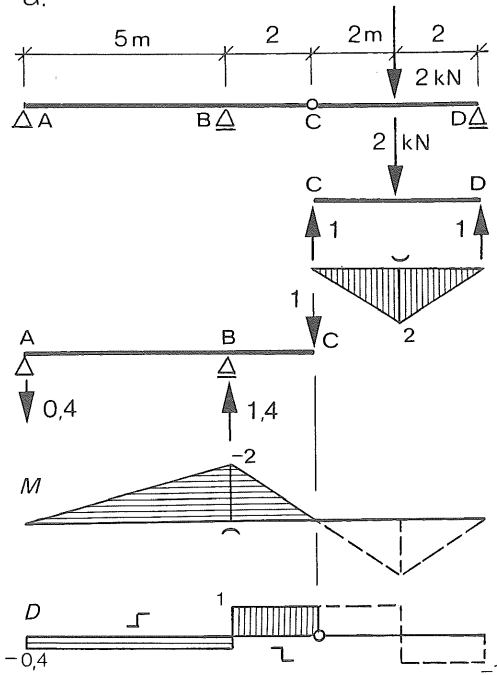
- b. Men kan de zaak echter ook geometrisch beschouwen. Het aanbrengen van een scharnier betekent dat er een nieuwe ligger op twee steunpunten is gevormd die men op de normale manier kan uitrekenen. De oplegreactie ter plaatse van het oorspronkelijke scharnier (in de doorgaande ligger) wordt nu beschouwd als een uitwendige kracht op het overblijvende deel van de ligger die nu statisch bepaald is opgelegd. Dit is feitelijk de eerste keer dat een scharnier niet als een onverplaatsbaar punt wordt beschouwd. Eén oplegging van het nieuw gevormde liggertje kan dus wat op en neer bewegen, maar bij statisch bepaalde constructies maakt dit niets uit omdat de krachtwerking onafhankelijk is van de optredende vervormingen.

In fig. b<sub>2</sub> kunnen beide opleggingen van het middenliggertje ten gevolge van de belasting een verticale verplaatsing ondergaan ten gevolge van het doorbuigen van de overstekken.

82

82. Berekening door splitsing in een aantal statisch bepaalde liggers

a.

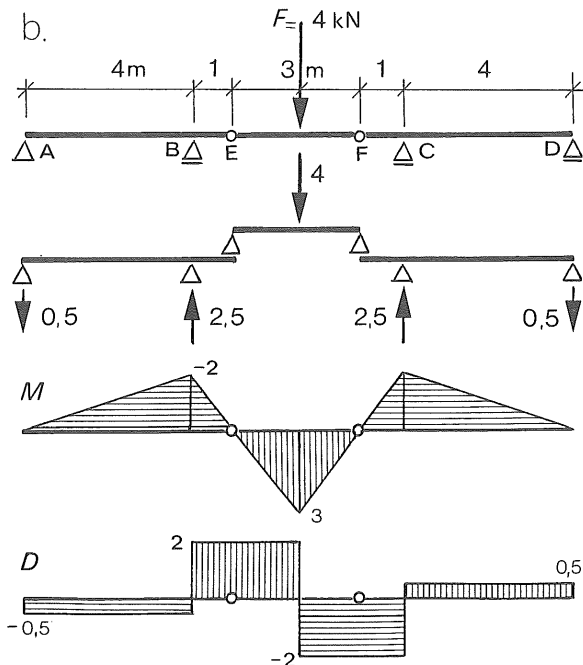


Twee eenvoudige voorbeelden zijn wat nader uitgewerkt.

- a. CD wordt beschouwd als een ligger op twee steunpunten. De linker oplegreactie van ligger CD levert dan een neerwaartse kracht op het overstek van ligger AB volgens het beginsel actie = reactie.

Beschouwt men de momentenlijn en de dwarskrachtenlijn van de gehele oorspronkelijke ligger dan moet de momentenlijn (zonder knik in het verloop) door het punt C gaan, terwijl de dwarskrachtenlijn ter plaatse van C gewoon doorgaat alsof er helemaal geen scharnier aanwezig zou zijn.

b.



- b. Ligger op vier steunpunten met twee scharnieren. EF wordt weer als een ligger op twee steunpunten beschouwd. De oplegreacties leveren weer neerwaartse krachten op de overstekken van de liggers AB en CD.

Indien op de liggers AE of FD nog andere lasten voorkomen dan hebben die geen enkele invloed op de 'middenligger' EF. De beide buitenste liggers kunnen elkaar dus niet beïnvloeden.

De momentenlijn moet altijd door de scharnierpunten gaan. Er kan alleen maar een knik ter plaatse van het scharnier in de momentenlijn optreden, als daar een puntlast staat.

Voorts blijft de dwarskrachtenlijn constant ter plaatse van het scharnier als alleen maar puntlasten (buiten dit scharnier) aangrijpen, en gaat de dwarskrachtenlijn ongebroken door bij een gelijkmatig verdeelde belasting.

Tracht indien maar enigszins mogelijk de bovengenoemde methode te volgen.

Bij de in 83. beschreven meer formele weg moet een aantal vergelijkingen worden opgelost, waarbij de kans op vergissingen vrij groot is.

83

83. Analytische wijze van oplossen

Algemene gang van de berekening

- Er staan drie evenwichtsvoorwaarden ter beschikking. De evenwichtsvoorwaarde  $\Sigma H = 0$  is noodzakelijk om de horizontale reactie in het éne vaste scharnier te kunnen bepalen. Indien horizontale krachten ontbreken, dan vervalt deze voorwaarde.

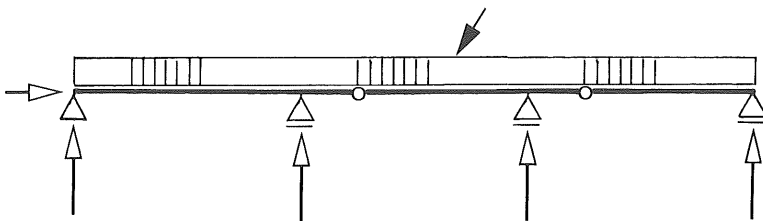
- Er zijn dan nog twee evenwichtsvoorwaarden over:

$$\begin{array}{l} \Sigma V = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{array}{l} \Sigma M_1 = 0 \\ \Sigma M_2 = 0 \end{array}$$

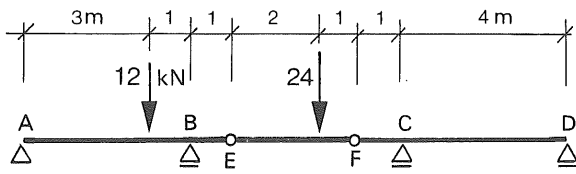
Gebruik bij voorkeur de tweede set vergelijkingen en kies de punten 1 en 2 ter plaatse van een ondersteuning. (Het bepalen van  $\Sigma M_3 = 0$  of  $\Sigma M_4 = 0$  levert geen nieuwe informatie, het derde punt mag immers niet op dezelfde lijn liggen als de eerste twee punten).

- Voor elk scharnier dat in de ligger is aangebracht moet gelden dat het buigende moment daar gelijk is aan nul. Maakt men nu om zo'n scharnier het statische moment op van het gehele resterende linker- of rechter gedeelte van de ligger en stelt men dat gelijk aan nul, dan vindt men juist voldoende extra vergelijkingen.

- Dit houdt in dat voor elk extra steunpunt (boven de basis steunpunten: scharnier + rol) ook een extra scharnier moet worden aangebracht.



84



a.

84. Voorbeeld van een analytische oplossing

Gegeven: een ligger op vier steunpunten met twee inwendige scharnieren. Voor de berekening zijn de volgende vier evenwichtsvergelijkingen gekozen:

- het statische moment van de gehele ligger om punt C is gelijk aan nul.
- het statische moment van de gehele ligger om punt D is gelijk aan nul.
- het statische moment om scharnier E van het linker deel van de ligger is gelijk aan nul.
- het statische moment om scharnier F van het linker deel van de ligger is gelijk aan nul.

In principe is men volkomen vrij in de keuze van de punten die men wenst te gebruiken voor het opmaken van de statische momenten.

In dit geval zijn de punten zodanig gekozen dat de oplegreacties  $V_A$  en  $V_B$  gemakkelijk zijn op te lossen uit (c) en (d) terwijl  $V_C$  en  $V_D$  daarna direct volgen uit (b) en (a).

$$(a): -12 \cdot 6 - 24 \cdot 2 + V_A \cdot 9 + V_B \cdot 5 - V_D \cdot 4 = 0$$

$$(b): -12 \cdot 10 - 24 \cdot 6 + V_A \cdot 13 + V_B \cdot 9 + V_C \cdot 4 = 0$$

$$(c): -12 \cdot 2 + V_A \cdot 5 + V_B \cdot 1 = 0$$

$$(d): -12 \cdot 5 - 24 \cdot 1 + V_A \cdot 8 + V_B \cdot 4 = 0$$

Herschreven:

$$(a): 9 V_A + 5 V_B - 4 V_D = + 120$$

$$(b): 13 V_A + 9 V_B + 4 V_C = + 264$$

$$(c): 5 V_A + 1 V_B = + 24$$

$$(d): 8 V_A + 4 V_B = + 84$$

$$4 \cdot (c): 20 V_A + 4 V_B = 96$$

$$1 \cdot (d): \quad \quad \quad 8 V_A + 4 V_B = 84$$

$$12 V_A = 12 \quad \quad \quad V_A = + 1 \text{ kN}$$

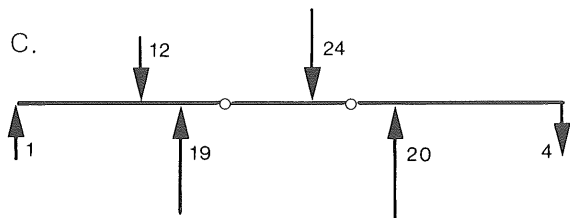
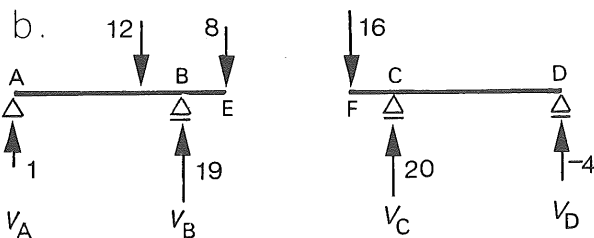
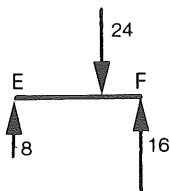
$$(c): \quad \quad \quad V_B = 24 - 5 = +19 \text{ kN}$$

$$(b): 4 V_C = 264 - 13 \cdot 1 - 9 \cdot 19 = 80$$

$$V_C = +20 \text{ kN}$$

$$(a): 4 V_D = 9 \cdot 1 + 5 \cdot 19 - 120 = -16$$

$$V_D = - 4 \text{ kN}$$



In schets b. zijn alle uitwendige krachten en oplegreacties weergegeven. Met behulp van deze gegevens kunnen de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn gemakkelijk worden getekend.

In fig. c. is de superpositie weergegeven van de drie afzonderlijke liggers, om de oorspronkelijke doorgaande ligger weer terug te krijgen.

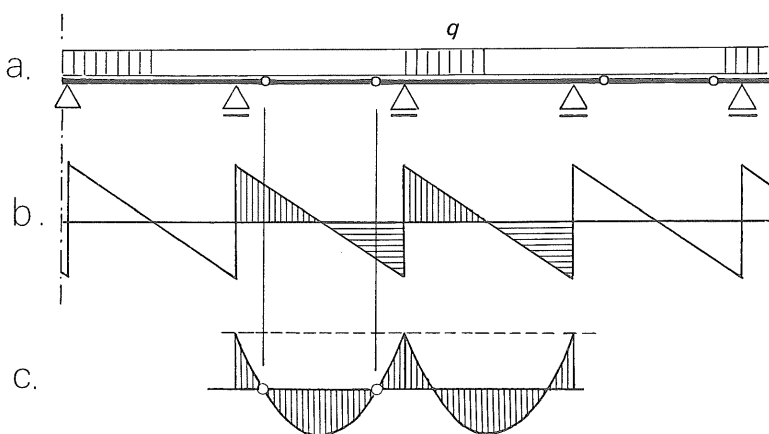
De uitwendige krachten in E en F (8 en 16 kN), vallen dan weg tegen elkaar maar blijven wel als dwarskrachten in de ligger aanwezig.

De ontmoedigde lezer wordt aangeraden het vraagstuk ook maar eens op te lossen op de manier die in 82. is beschreven waarbij het liggertje EF is opgelegd op de uitkragende liggers ABE en FCD.

85

85. Doorgaande liggers met scharnieren onder gelijkmatig verdeelde belasting

- a. Indien men bij een doorgaande ligger met gelijke velden en onder gelijkmatig verdeelde belasting om het andere veld steeds twee symmetrisch gelegen scharnieren aanbrengt dan blijkt het momentenverloop in alle opvolgende velden precies gelijk te moeten zijn.
- b. Het beste is dit in te zien door het dwarskrachtenverloop te beschouwen, uitgaande van de 'tussengehangen' liggertjes. Dit dwarskrachtenverloop is volkomen onafhankelijk van de ligging van de scharnieren, hetzelfde geldt voor de aanliggende velden waar geen scharnieren in voorkomen.
- c. Het momentenverloop per veld moet dus parabolisch zijn met de extreme waarde midden tussen de steunpunten (dwarskrachtennulpunt). Aangezien het moment ter plaatse van de scharnieren gelijk aan nul moet zijn ligt ook de nullijn vast voor de velden met scharnieren. Uit evenwichtsoverwegingen moeten de negatieve momenten boven de steunpunten voor de aangrenzende velden gelijk zijn zodat de ligging van de scharnieren het momentenverloop in de gehele doorgaande ligger bepaalt.

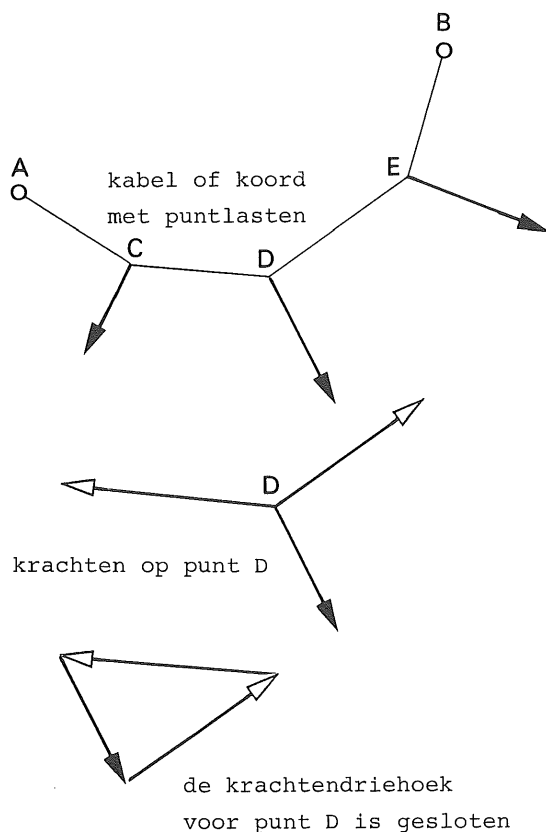


Om de momentenlijn te vinden bij een willekeurige (symmetrische) ligging van de scharnieren, tekent men eerst een parabolisch momentenverloop als bij een ligger op twee steunpunten.

Vervolgens kan men dan een horizontale nullijn tekenen door de punten waar de verticalen door de scharnieren de parabolen snijden.

Het optimaliseren van het moment is op deze wijze al bijzonder eenvoudig geworden, zie 71.

86



86. Kabel belast door een aantal puntlasten

Een slap koord wordt tussen twee vaste punten opgehangen. Op een aantal plaatsen van het koord laat men puntlasten aangrijpen in willekeurige richtingen. Onder invloed van deze krachten gaat het koord strak staan en neemt een geknikte vorm aan. Verplaatst men de ophangpunten van het koord dan zal ook de vorm van het koord zich wijzigen. In elke toestand zullen de uitwendige krachten en de opgewekte trekkrachten in het koord echter evenwicht met elkaar maken, zodat een beschouwing van het evenwicht ook de vorm moet leveren die het koord aanneemt. Het blijkt dat dit op eenvoudige wijze grafisch kan worden gedaan.

Een koord, een touw, een kabel of een ketting kan geen (althans hoegenaamd geen) buigende momenten opnemen; het kan alleen maar trekkrachten overbrengen. Dit betekent dat in elk punt van het koord waar een uitwendige kracht op het koord aangrijpt, deze kracht en de trekkrachten in de aangrenzende delen van het koord evenwicht met elkaar moeten maken. Voor elk aangrijpingspunt van een kracht moet de bijbehorende krachtendriehoek gesloten zijn.

87. Bepaling van de trekkrachten in het koord

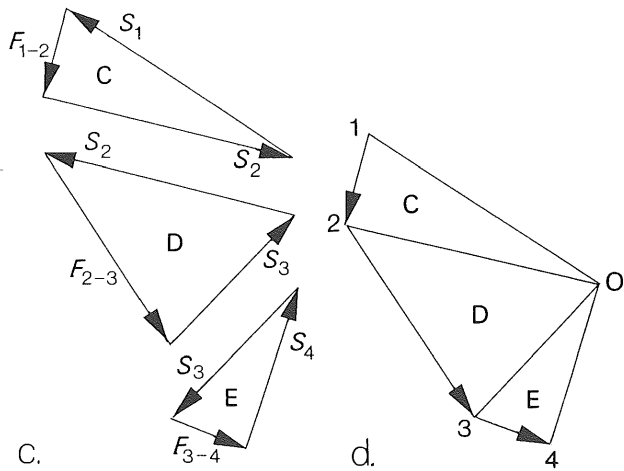
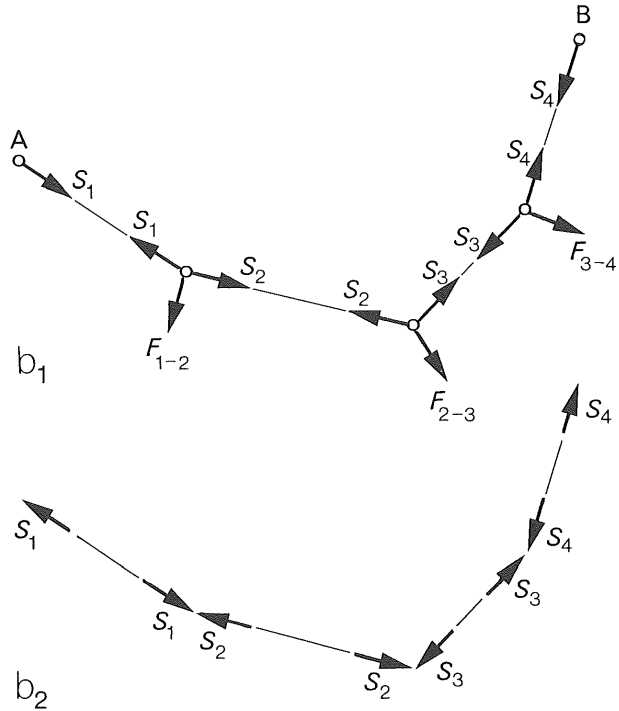
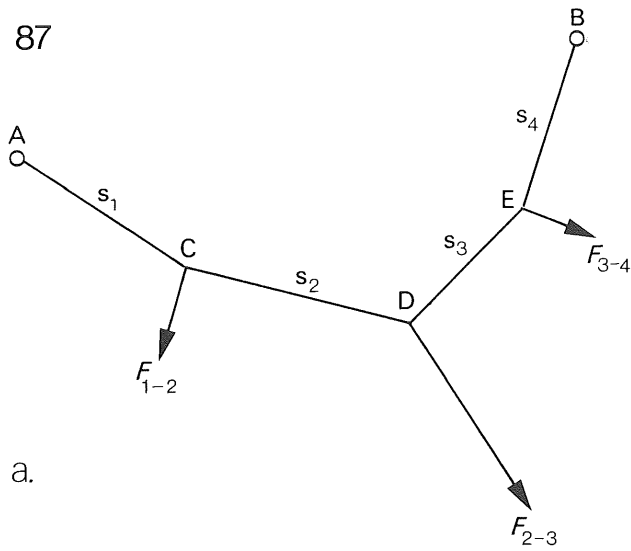
De vorm van het koord en de grootte en richting van de uitwendige krachten worden bekend verondersteld.

- a. Het koord is opgehangen in de punten A en B en de geknikte vorm A-C-D-E-B geeft de vorm van het koord weer. Gevraagd is de grootte van de trekkrachten die in de delen  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  en  $s_4$  van het koord zullen optreden onder invloed van de bekende uitwendige krachten  $F_{1-2}$ ,  $F_{2-3}$  en  $F_{3-4}$ . Voor de uitwendige krachten zijn dubbele indices gebruikt om aan te geven tussen welke delen van het koord de krachten aangrijpen.

- $b_1$ . In fig.  $b_1$  zijn de krachten weergegeven die op ieder van de knooppunten A t/m E werken.  
 $b_2$ . In fig.  $b_2$  zijn de krachten aangegeven die op de verschillende onderdelen van het koord werken.

De richtingen van de krachten in fig.  $b_1$  en  $b_2$  volgt weer uit het beginsel: actie = reactie.

87



- c. Voor elk van de knooppunten C, D en E kunnen de krachten in het koord worden bepaald met behulp van een krachtdriehoek (zie 6.).

De controle op de juistheid van de getekende krachten bestaat hierin dat de krachten  $S_2$  voor de punten C en D even groot moeten zijn maar tegengesteld van richting. Hetzelfde geldt voor de krachten  $S_3$  in de punten D en E.

- d. Dit betekent dat de opeenvolgende krachtdriehoeken aan elkaar moeten passen zoals in fig. d. is aangegeven.

88

## 88. Poolfiguur en stangenveelhoek

De serie aaneengesloten krachtendriehoeken van fig. d uit 87. wordt poolfiguur genoemd en de geknikte lijn uit fig. a die de vorm van het koord aangeeft wordt stangenveelhoek of stangenkromme genoemd.

In de poolfiguur worden uitsluitend krachten uitgezet (op een willekeurig te kiezen schaal, bijv.  $1 \text{ cm} \approx 2 \text{ kN}$ ) zie fig. b.

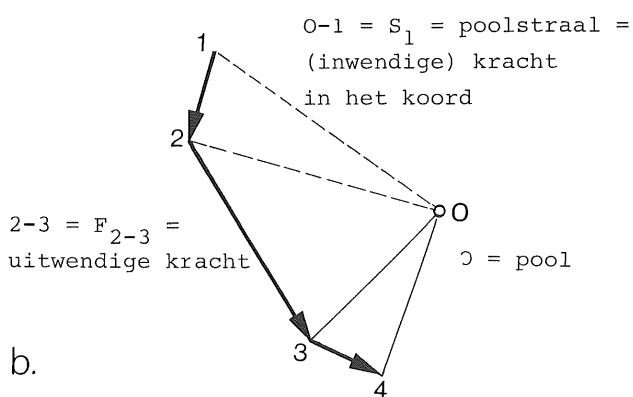
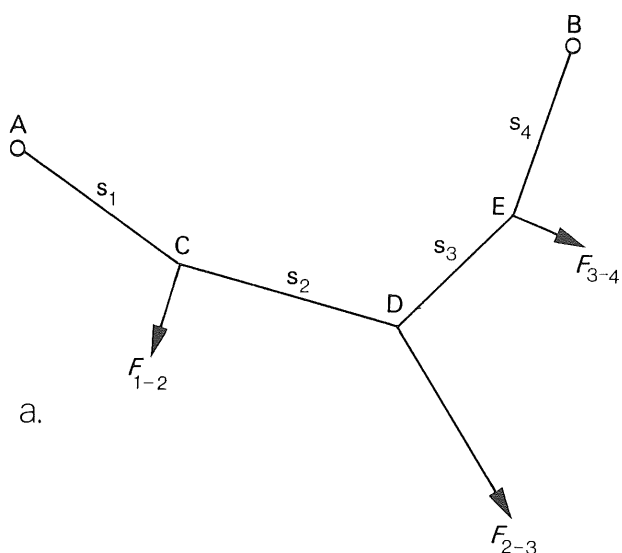
- a. In de stangenveelhoek wordt een geometrische vorm aangegeven en worden in principe alleen lengtematen uitgezet (op een eveneens willekeurig te kiezen schaal, bijv.  $1 \text{ cm} \approx 1 \text{ m}$ ).

(Ter verduidelijking zijn in een aantal stangenveelhoeken ook krachten ingetekend, meestal op een kleinere schaal dan in de poolfiguur is aangehouden. Voor praktische toepassingen wordt dit echter zelden of nooit gedaan).

- b. Bepaling van de poolfiguur:

- Zet de krachten  $F$  van links naar rechts gaande achter elkaar in richting en grootte uit. De gebruikte dubbele indices voor de krachten (1-2, 2-3, 3-4) worden steeds aan het begin en het einde van de betreffende vector geplaatst.
- Trek uit punt 1 van de kracht 1-2 ( $= F_{1-2}$ ) een lijn evenwijdig aan de eerste stang  $s_1$  van de stangenveelhoek en vanuit punt 2 een lijn evenwijdig aan stang  $s_2$ . Het snijpunt van beide lijnen levert de pool  $O$  van de poolfiguur. (Hiermee is dus weer de krachtendriehoek voor punt  $C$  getekend).
- Volg dezelfde handelwijze voor de kracht  $F_{2-3}$  van de poolfiguur. Alleen de lijn evenwijdig aan stang  $s_3$  behoeft dan nog maar te worden getekend. Ook deze lijn moet weer in de pool  $O$  uitkomen wil er voor punt  $D$  evenwicht heersen.

In de poolfiguur wordt elke uitwendige kracht ingesloten tussen twee stralen (bijv.  $F_{2-3}$  tussen  $S_2$  en  $S_3$ ). In de stangenveelhoek wordt dezelfde kracht ingesloten door de overeenkomstige stangen ( $F_{2-3}$  tussen  $s_2$  en  $s_3$ ).





89

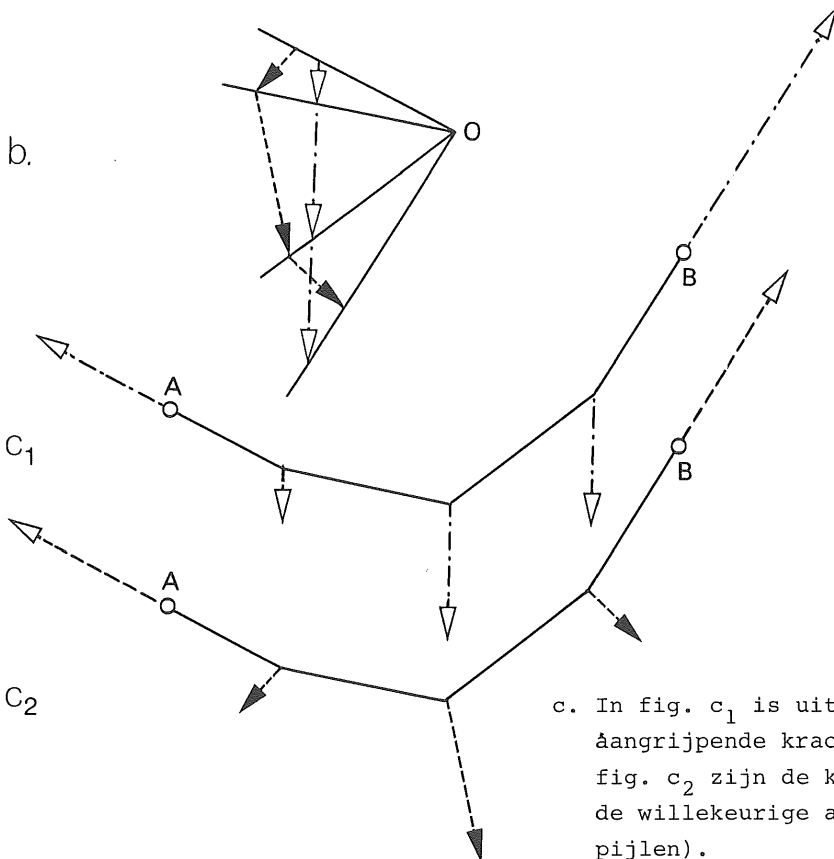
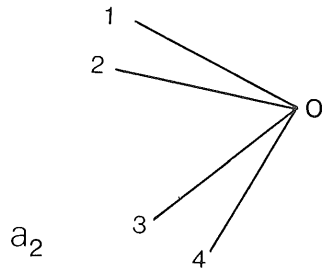
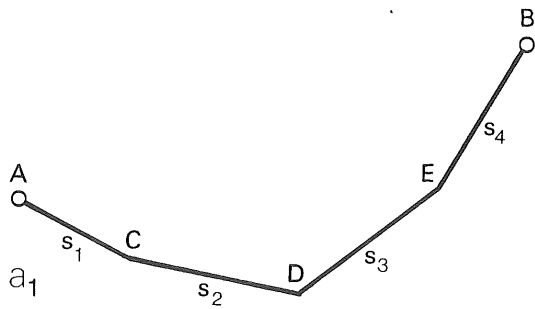
89. Vorm van het koord gegeven

In 87. en 88. werden zowel de vorm van het koord als de grootte en richting van de uitwendige krachten als gegeven aangenomen. Het gehele procédé had daar alleen de betekenis van een evenwichtscontrole. Hier zal worden nagegaan welke krachten in staat zijn het koord in een gegeven vorm te houden.

a<sub>1</sub>. In fig. a<sub>1</sub> is de vorm van het koord aangegeven.

a<sub>2</sub>. Er wordt een willekeurig punt O als pool aangenomen en vanuit O worden de stralen van de poolfiguur getrokken, evenwijdig aan de stangen van de stangenveelhoek.

b. Elke rechte of geknikte lijn die de opeenvolgende poolstralen verbindt en zo de poolfiguur vormt, geeft een mogelijke combinatie van krachten aan die het koord in de gegeven vorm houdt. Het aantal mogelijkheden is dus oneindig groot. Bij een genomen keuze van zo'n 'sluitlijn' van de poolfiguur ligt eigenlijk alleen nog maar de onderlinge verhouding van de krachten vast; de schaal van de poolfiguur is immers nog willekeurig te kiezen. Zodra echter de grootte van één kracht is gegeven, ligt ook van alle andere krachten de grootte vast.

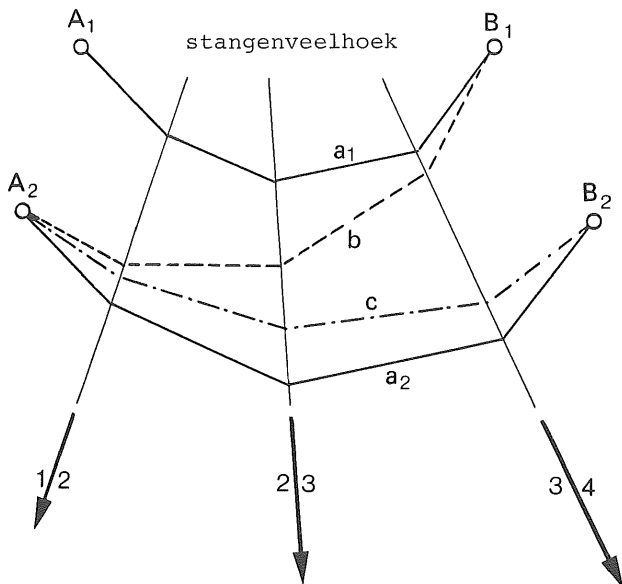
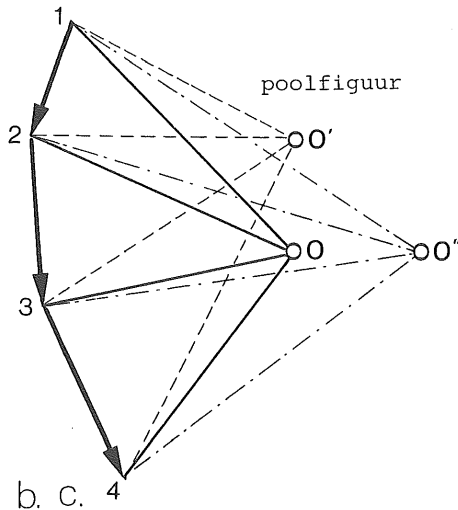


c. In fig. c<sub>1</sub> is uitgegaan van de verticaal aangrijpende krachten volgens fig. b; in fig. c<sub>2</sub> zijn de krachten getekend volgens de willekeurige aanname van fig. b (zwarte pijlen).

90

90. Werklijn en grootte van de krachten gegeven  
 Hier zal worden nagegaan welke vormen het koord kan aannemen als de werklijnen en de grootte van de uitwendige krachten zijn gegeven.

- a. Er wordt een poolfiguur getekend, door de krachten achter elkaar in richting en grootte uit te zetten en de poolstralen te tekenen vanuit een willekeurig gekozen pool  $O$ . Uitgaande van deze poolfiguur kan een willekeurig aantal stangenveelhoeken worden getekend waarvan de overeenkomstige stangen allemaal evenwijdig zijn maar waarvan de vorm kan variëren als de gegeven uitwendige krachten niet evenwijdig zijn (stangenveelhoeken  $a_1$  en  $a_2$ ).
- b. Verplaatst men de pool  $O$  in verticale richting ( $O'$ ), dan gaat de stangenveelhoek wat schever staan, het ene ophangpunt komt hoger te liggen dan het andere (de stangenveelhoek  $b$  loopt nu van  $A_2$  naar  $B_1$ ). Het tekenen van een stangenveelhoek die door twee van te voren gegeven ophangpunten gaat wordt behandeld in 98.
- c. Verplaatst men de pool  $O$  in horizontale richting naar rechts ( $O''$ ) dan wordt de stangenveelhoek vlakker en de krachten in het koord en in de ophangpunten nemen toe (stangenveelhoek  $c$ ).

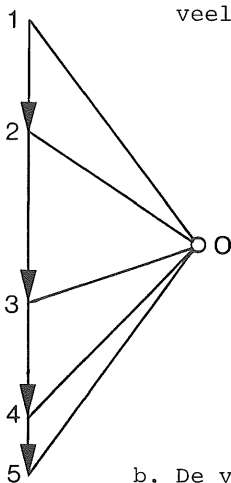
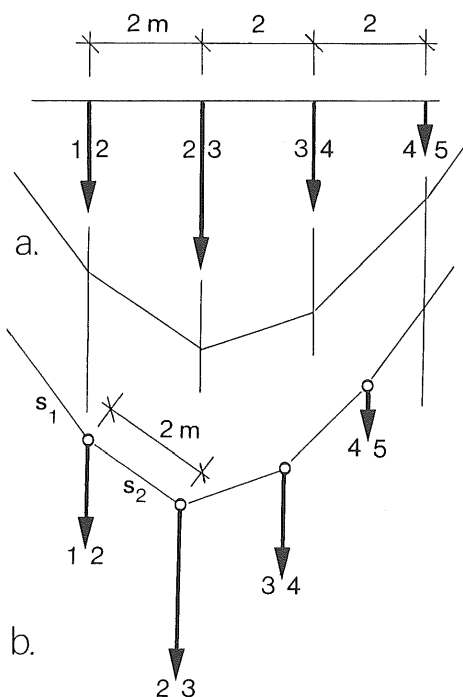


Ook hier kan weer een oneindig aantal stangenveelhoeken worden getekend. Alleen als men een aantal aanvullende voorwaarden stelt, is de vorm van de stangenveelhoek eenduidig bepaald.

91\*

91. Krachten aan het koord gefixeerd

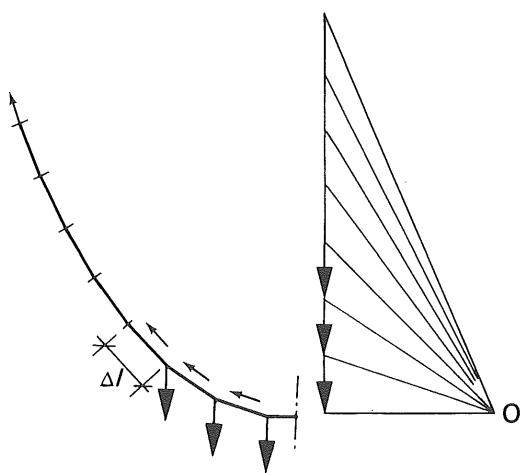
Indien de krachten gefixeerd zijn aan een bepaalde plaats van het koord (bijv. een aantal gewichten dat aan het koord is bevestigd) dan varieert de plaats van de werklijnen met de vorm van de stangenveelhoek.



a. Stangenveelhoek voor de gebruikelijke situatie waarbij de ligging van de werklijnen ongewijzigd blijft (horizontale afstand van de werklijnen = 2 m).

b. De verticale krachten grijpen op onderling gelijke afstanden op het touw aan. Men gebruikt dezelfde poolfiguur als in het vorige geval en ook de eerste en tweede stang in de stangenveelhoek worden op dezelfde wijze uitgezet. Op de stang  $s_2$  wordt nu de gegeven afstand van 2 m uitgezet om de plaats van de werklijn van kracht  $F_{2-3}$  te vinden. Vervolgens tekent men de stang  $s_3$ , zet hierop weer een afstand van 2 m af en vindt zo de werklijn van  $F_{3-4}$  enz.

c. Dit procédé is vooral nuttig voor de bepaling van de vorm van een koord of ketting onder eigen gewicht indien we dit sterk willen laten doorhangen (kettlinglijn). Elke strekkende meter van het koord heeft hetzelfde gewicht, de daaruit volgende krachten per m' zetten we uit in de poolfiguur. Uitgaande van een symmetrische doorhang kunnen we dan in het laagste (symmetriepunt) van het koord beginnen en achtereenvolgens op elke nieuw getekende stang een afstand van 1 m afpassen om de werklijn voor de volgende kracht te vinden. Indien de vorm ons niet bevalt kan de zaak worden herhaald voor een andere poolafstand.



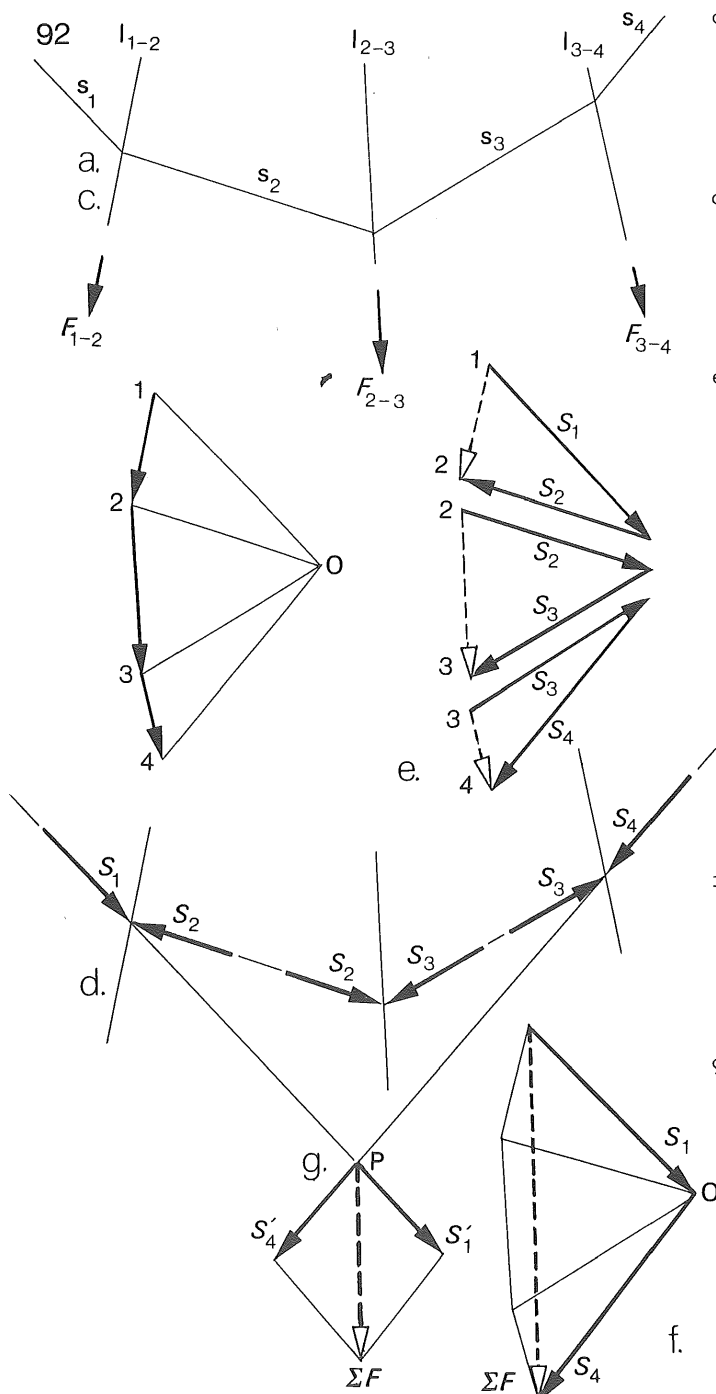
C. Kettinglijn

Bij een geringe doorhang van het koord loont dit procédé de moeite niet en kan men gemakkelijker (en vrijwel net zo nauwkeurig) met een constante afstand van de werklijnen werken zoals onder a. is vermeld.

92. Bepaling van de resultante van een aantal (min of meer) evenwijdige krachten  
 Indien de resultante moet worden bepaald van een aantal krachten waarvan de werklijnen elkaar snijden, dan kan dit zowel grafisch (zie 10.) als analytisch (zie 11.) Indien de krachten echter vrijwel evenwijdig zijn wordt de grafische methode minder plezierig omdat de snijpunten van de werklijnen zo ver uit elkaar komen te liggen. Als de krachten evenwijdig zijn gaat het grafische procédé volgens 10. niet meer op en kan alleen nog de analytische weg worden gevolgd (zie 12.).

Met behulp van poolfiguur en stangenveelhoek is echter weer een grafische oplossing mogelijk.

- Gegeven: drie krachten en de ligging van hun werklijnen.  
 Gevraagd: grootte en richting van de resultante en ligging van de werklijn.
- Oplossing: De gegeven krachten worden achter elkaar van links naar rechts gaande in richting en grootte uitgezet in de poolfiguur. Er wordt een willekeurige pool O gekozen waarna de stralen van de poolfiguur kunnen worden getekend.
- Uitgaande van de stralen van de poolfiguur wordt een willekeurig gelegen stangenveelhoek getekend. Dit is dan één van de mogelijke standen van een koord waar de gegeven krachten op aangrijpen
- We verlaten nu de gedachte aan een koord en gebruiken de getekende stangenkromme alleen nog maar om elke gegeven kracht te kunnen ontbinden langs de twee aanliggende stangen van de stangenkromme.
- Om deze ontbinding wat duidelijker te kunnen aangeven is de poolfiguur volgens b. weer in losse krachtdriehoeken gesplitst. Let op: bij het ontbinden van een kracht lopen de ontbondenen tezamen van het beginpunt van de oorspronkelijke kracht naar het eindpunt hiervan. In fig. d. zijn deze ontbondenen langs de desbetreffende stangen van de stangenveelhoek ingetekend. Dit houdt in dat deze ontbondenen elkaar twee aan twee juist opheffen en dat alleen de krachten langs de eerste en de laatste stang nog over blijven.
- De grootte en de richting van de resultante van de twee overblijvende krachten  $S_1$  en  $S_4$  volgt uit de poolfiguur en is uiteraard gelijk aan de resultante van de oorspronkelijke krachten.
- De werklijn van de resultante moet gaan door het snijpunt van de werklijnen van  $S_1$  en  $S_4$ . Men vindt dit snijpunt P door de eerste en laatste stangen van de stangenveelhoek te verlengen.



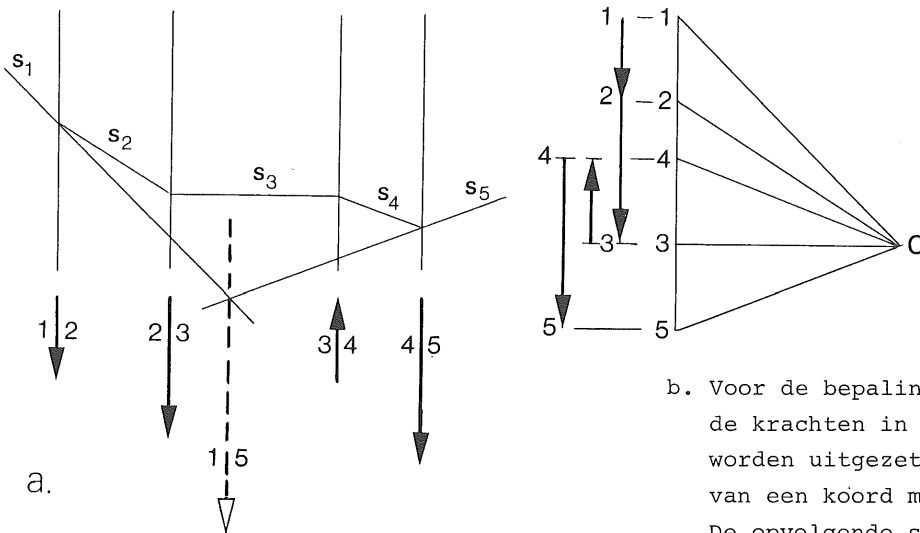
93. Bepaling van de resultante van een aantal evenwijdige krachten

Poolfiguur en stangenveelhoek worden niet alleen maar gebruikt voor het bepalen van de krachtswerking in koorden maar voornamelijk voor de grafische bepaling van de momentenlijnen bij liggers (zie 99. en 100.) en voor het grafisch bepalen van het doorbuigingsverloop van liggers en staven (deze stof wordt behandeld in P2).

In de laatstgenoemde gevallen wordt steeds van evenwijdige krachten uitgegaan. Het bepalen van de resultante van evenwijdige krachten (93.) en het ontbinden van een kracht in twee evenwijdige krachten (94., 95., 96.) vormen het basisbestanddeel van de zojuist genoemde toepassingen van poolfiguur en stangenveelhoek.

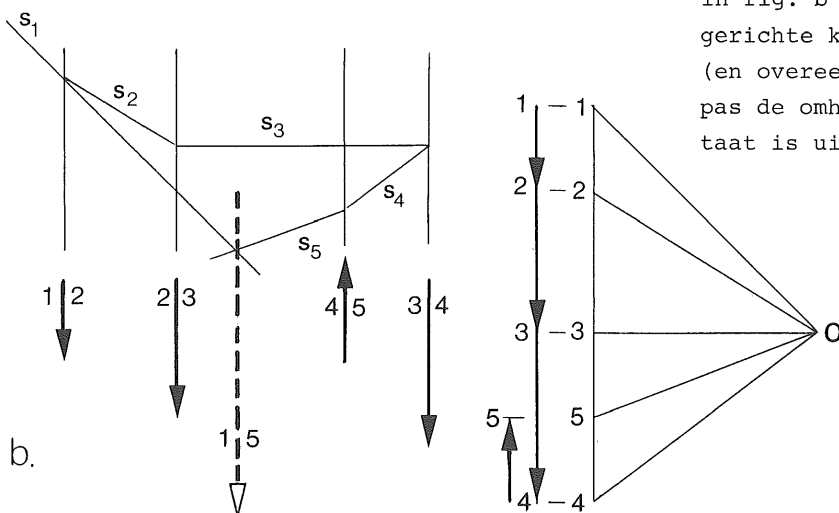
93

a. Het procedé volgens 93. blijft geldig als de evenwijdige krachten zowel in positieve als in negatieve richting werken. De aanduiding van de krachten met een cijfer aan het begin- en eindpunt van elke vector is dan erg belangrijk om niet in de war te raken in de poolfiguur.



a.

b. Voor de bepaling van de resultante kunnen de krachten in een willekeurige volgorde worden uitgezet (de gedachte aan de vorm van een koord moet men dan maar verlaten). De opvolgende stangen van de stangenveelhoek moeten dan eveneens in deze volgorde van de ene kracht naar de andere lopen. In fig. b zijn eerst alle verticaal omlaag gerichte krachten achter elkaar uitgezet (en overeenkomstig genummerd) en daarna pas de omhoog gerichte kracht. Het resultaat is uiteraard hetzelfde als onder a.

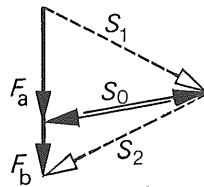
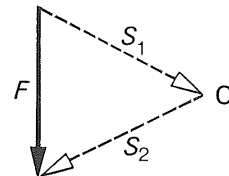
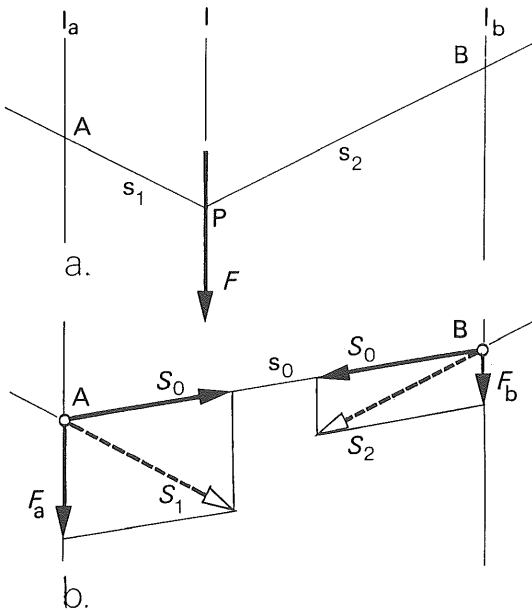


b.

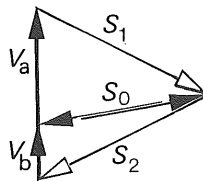
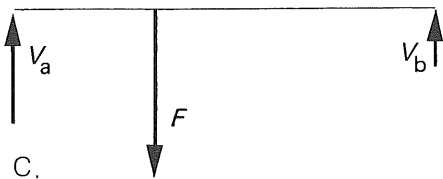
94. Ontbinden van een kracht in twee evenwijdige krachten

- a. De verticale kracht  $F$  moet worden ontbonden langs de werklijnen  $l_a$  en  $l_b$ .

Oplossing: uitgaande van de kracht  $F$  wordt een willekeurige poolfiguur getekend met de poolstralen  $S_1$  en  $S_2$ . Vanuit een willekeurig punt  $P$  op de werklijn  $l$  van  $F$  worden de bijbehorende stangen  $s_1$  en  $s_2$  getekend die  $l_a$  en  $l_b$  resp. in  $A$  en  $B$  snijden.



- b. De krachten  $S_1$  en  $S_2$  worden nu ontbonden langs de respectievelijke werklijnen  $l_a$  en  $l_b$  en langs de verbindingslijn  $AB$ , die de sluitlijn van de stangenveelhoek wordt genoemd. De krachten  $S_0$  langs  $AB$  heffen elkaar weer op en er resteren de verticale ontbondenen  $F_a$  en  $F_b$ .



- c. De krachten  $V_A$  en  $V_B$  die evenwicht maken met  $F$  zijn gelijk aan  $F_a$  en  $F_b$ , maar tegengesteld gericht.

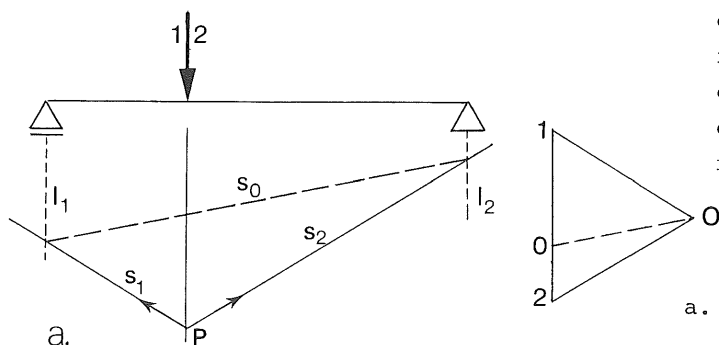
De grootte van  $F_a$  en  $F_b$  evenals die van  $V_A$  en  $V_B$  volgt direct uit de poolfiguur door de poolstraal  $S_0$  te trekken, evenwijdig aan de sluitlijn  $AB$  ( $s_0$ ) van de stangenveelhoek.

In de poolfiguren van fig. b en c is de kracht  $S_0$  bij uitzondering dubbel ingetekend omdat hij eenmaal bij de bovenste krachtendriehoek hoort en eenmaal bij de onderste krachtendriehoek, maar dan wel tegengesteld gericht.

95

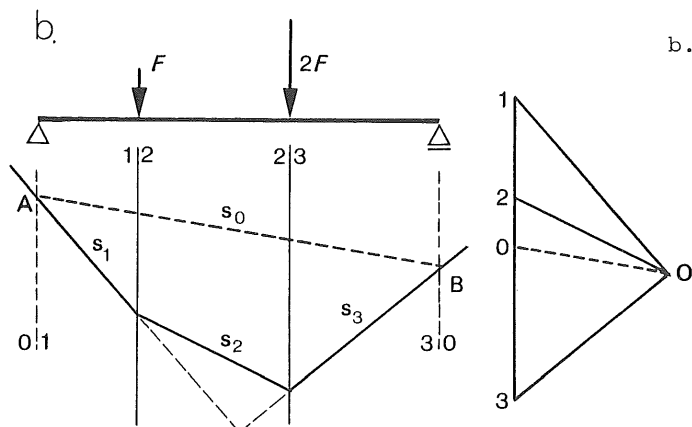
95. Oplegreacties bij een ligger op twee steunpunten

Het procedé volgens 94. is voornamelijk van toepassing voor de bepaling van de oplegreacties bij liggers op twee steunpunten; alle verticale krachten die op de ligger werken hebben één verticale resultante (die kan worden bepaald volgens 93.), en deze resultante zal weer evenwicht moeten maken met de oplegreacties  $V_A$  en  $V_B$ .



a. Routinematige bepaling van de oplegreacties:

- Teken de ligger met de kracht 1-2 en teken de werklijnen voor de kracht en de oplegreacties.
- Zet de kracht 1-2 uit in een poolfiguur met een willekeurige pool O.
- Trek vanuit een willekeurig punt P van de werklijn van 1-2 een stang  $s_1$  (evenwijdig aan de poolstraal O-1) naar de werklijn  $l_1$ . Trek evenzo een stang  $s_2$  (evenwijdig aan de poolstraal 2-0) naar de werklijn  $l_2$ .
- Verbind de snijpunten van deze stangen met de werklijnen door de sluitlijn  $s_0$ .
- Trek in de poolfiguur een straal O-0, evenwijdig aan  $s_0$ .
- De kracht 1-2 maakt nu evenwicht met de kracht 2-0 langs  $l_2$  en de kracht 0-1 langs  $l_1$ .
- Controle: in poolfiguur en stangenveelhoek zijn de krachten steeds ingesloten door poolstralen c.q. stangen die evenwijdig zijn.



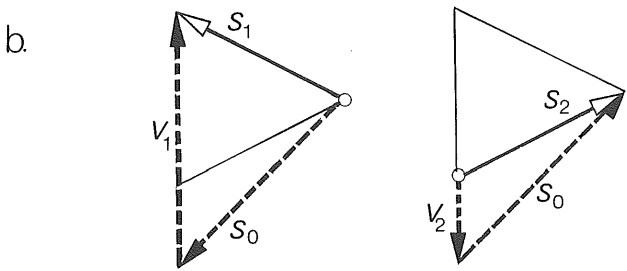
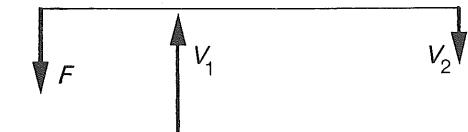
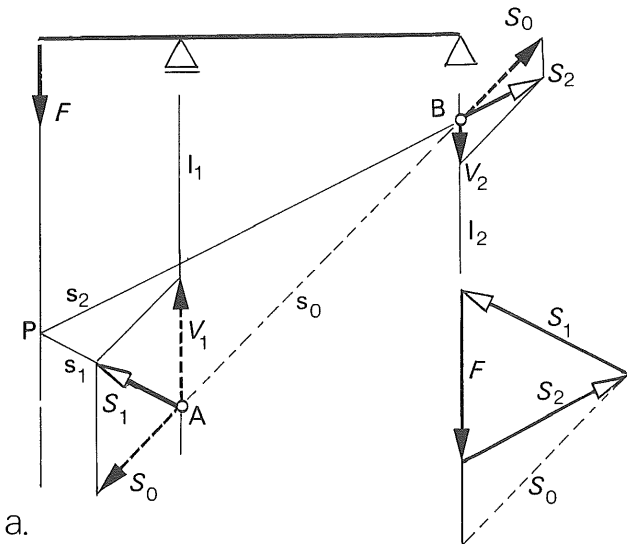
b. Indien een aantal puntlasten op de ligger aangrijpen dan kan de resultante worden bepaald volgens 93. De eerste en de laatste stang van de stangenveelhoek snijden de werklijnen voor de oplegreacties  $V_A$  en  $V_B$  in de punten A en B. De sluitlijn  $s_0$  wordt weer gevormd door de verbindingslijn A-B. In de poolfiguur trekt men de poolstraal O-0 evenwijdig aan stang  $s_0$ , waardoor de oplegreacties  $V_A$  en  $V_B$  bekend zijn.

In 100. zal blijken dat op deze wijze tegelijkertijd ook de momentenlijn voor de ligger is getekend.

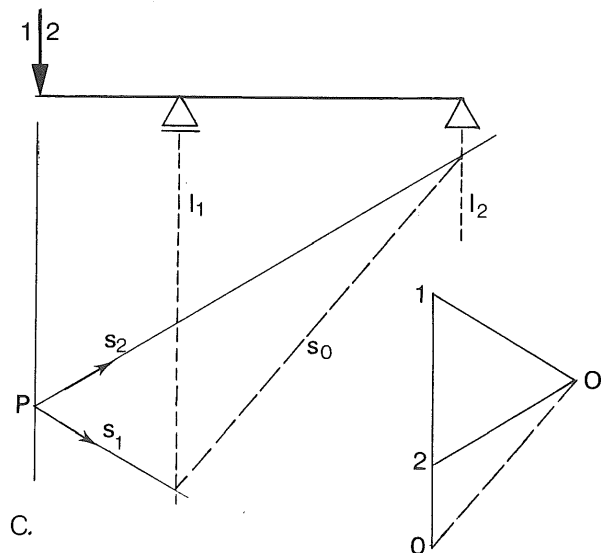
96

96. Oplegreacties bij een ligger op twee steunpunten met een puntlast op het overstek

- a. Bij een ligger met een puntlast op het overstek ligt de werklijn van  $F$  buiten de twee werklijnen waarlangs de reactiekrachten werken. In principe gaat men precies eender te werk, maar men moet zich even goed realiseren wat men doet. Evenals in 95. wordt uitgaande van de gegeven kracht  $F$  een poolfiguur getekend. Vanuit een punt  $P$  op de werklijn van  $F$  wordt een stang  $s_1$  naar de werklijn  $l_1$  getrokken (snijpunt  $A$ ) en eveneens vanuit  $P$  een stang  $s_2$  naar de werklijn  $l_2$  (snijpunt  $B$ ). De verbindingslijn  $AB$  geeft weer de sluitlijn  $s_0$  aan in de stangenveelhoek. De overeenkomstige poolstraal ligt nu buiten de twee krachten  $S_1$  en  $S_2$ . In deze poolfiguur zijn de krachten  $S_1$  en  $S_2$  zodanig getekend dat ze evenwicht maken met  $F$ . Deze krachten worden nu in de stangenveelhoek weer ontbonden in een verticale component en in een tweede component langs de sluitlijn  $s_0$ . De krachten  $S_0$  vallen weer tegen elkaar weg en de overgebleven krachten vormen de oplegreacties  $V_1$  en  $V_2$ .



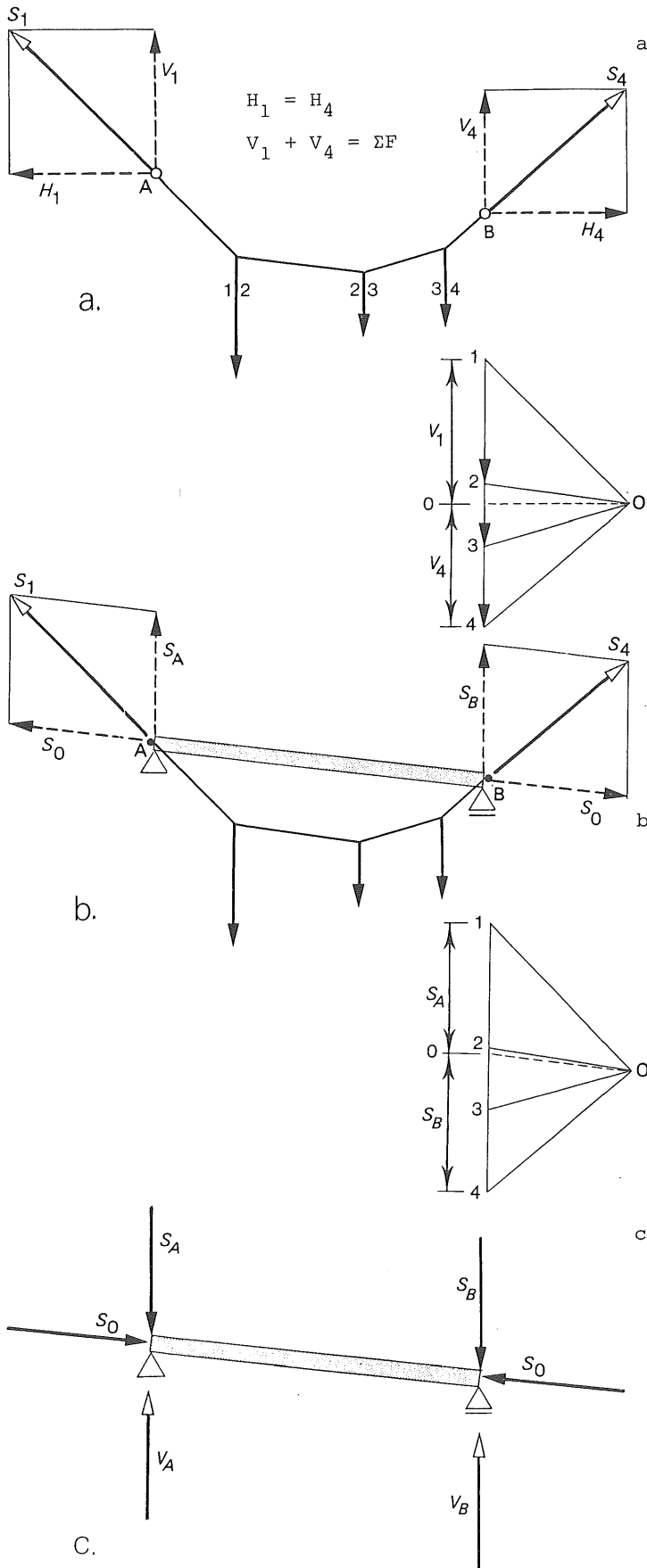
- b. Voor elke oplegreactie is de poolfiguur herhaald en zijn de desbetreffende krachten ingetekend.



- c. Voor een routinematige bepaling van de oplegreacties gelden woordelijk de regels die in 95. onder a. werden gegeven. In de poolfiguur maakt de uitwendige kracht 1-2 (omlaag gericht) nu evenwicht met de kracht 2-0 (eveneens omlaag gericht) en de kracht 0-1, (omhoog gericht).



97



97. Relatie tussen reactiekrachten bij een koord en oplegreacties bij een ligger

a. Indien op een koord uitsluitend verticale krachten aangrijpen kunnen de krachten in de ophangpunten van het koord nog alle waarden aannemen, afhankelijk van de pool die is gekozen (deze bepaalt immers de krachten in de uiterste stangen  $S_1$  en  $S_n$ ). De horizontale componenten van deze krachten zijn echter even groot en tegengesteld gericht, terwijl de som van de verticale componenten gelijk moet zijn aan de som van alle uitwendige verticale krachten.

Bij het bepalen van de oplegreacties bij een ligger volgens 95. en 96. speelt de vorm van de poolfiguur en de stangenveelhoek geen enkele rol in het uiteindelijke resultaat. Door het tekenen van de sluitlijn  $s_0$  in de stangenveelhoek vallen de horizontale componenten tegen elkaar weg en is de verdeling van de verticale kracht over de twee opleggingen ook volgens het evenwicht.

Een eenvoudig gedachtenexperiment kan hier zeer verhelderend werken.

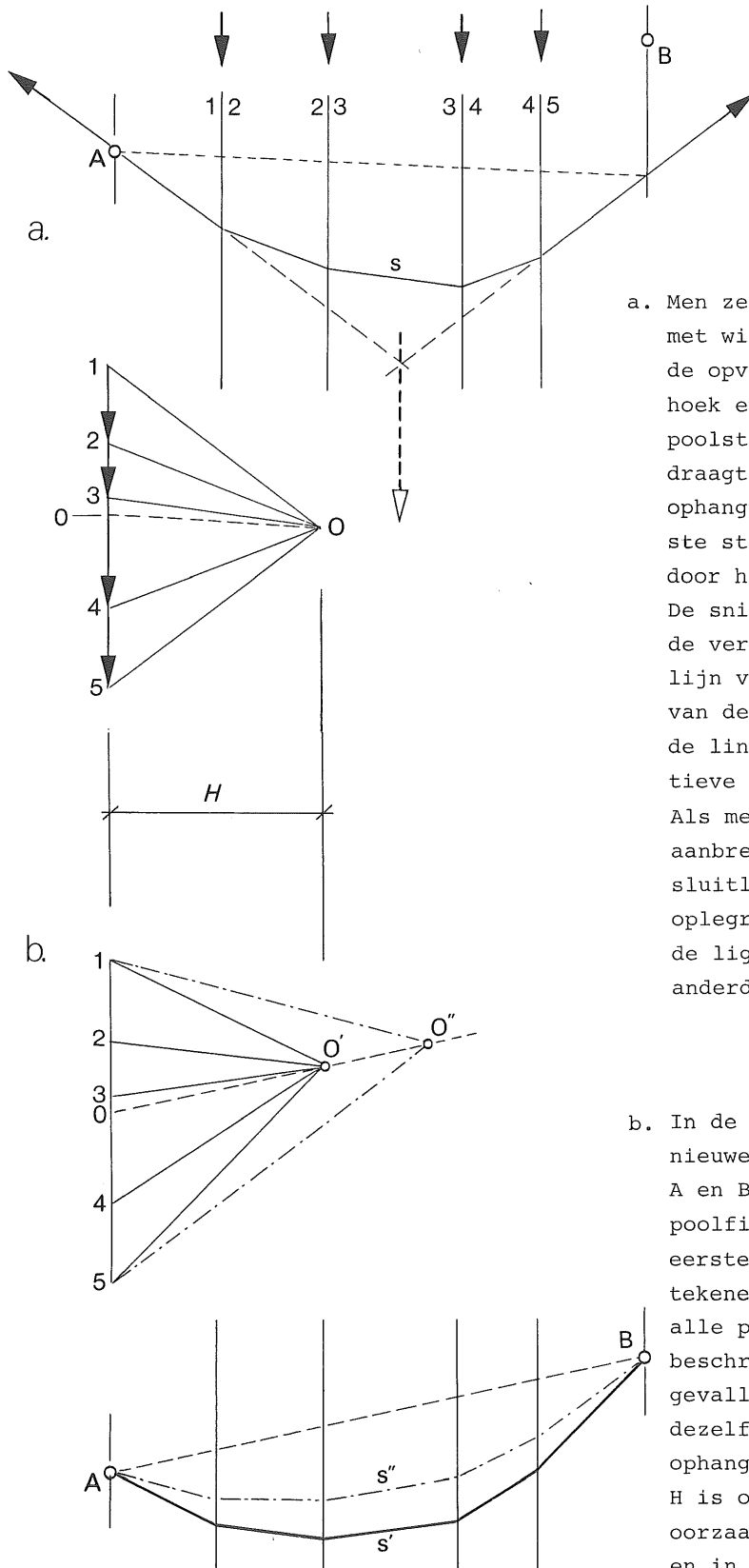
b. Als men de ophangpunten A en B van het koord gebruikt als de opleggingen van een staaf AB en het koord weer aan de uiteinden van deze staaf vastmaakt, dan neemt de staaf een drukkracht  $S_0$  op en de verticale oplegreacties van de staaf zijn precies dezelfde alsof de krachten rechtstreeks op de staaf zouden aangrijpen, inplaats van hierop te worden overgebracht door het koord. In fig. b zijn de krachten aangegeven die op het koord werken (en weer ontbonden langs  $s_0$  en een verticale lijn).

c. In fig. c zijn (volgens het beginsel actie = reactie) de krachten weergegeven die het koord op de staaf uitoefent. De krachten  $S_0$  in A en B maken evenwicht met elkaar, de verticale krachten  $S_A$  en  $S_B$  worden rechtstreeks door de opleggingen opgenomen en leveren daar de oplegreacties  $V_A$  en  $V_B$ . De ligging van deze staaf beïnvloedt de grootte van de oplegreacties van de staaf dan ook niet (zolang de werklijnen van de uitwendige krachten niet veranderen). Dit geeft een uitstekend middel om een koord door twee gegeven ophangpunten aan te brengen (zie 98.).

98

## 98. Koord door twee gegeven ophangpunten

Gevraagd: de mogelijke vormen van een koord te bepalen waarop een viertal lasten aangrijpen en dat bevestigd moet worden in de ophangpunten A en B.



a. Men zet de krachten uit in een poolfiguur met willekeurig gekozen pool O en tekent de opvolgende stangen van de stangenveelhoek evenwijdig aan de overeenkomstige poolstralen, waarbij men er zorg voor draagt dat de eerste stang door het linker ophangpunt A van het koord gaat. De laatste stang zal dan in het algemeen niet door het rechter ophangpunt B gaan. De snijpunten van de uiterste stangen met de verticalen door A en B leveren de sluitlijn van de stangenveelhoek en de verdeling van de som van de verticale krachten over de linker en rechter oplegging van de fictieve verbindingstaaf.

Als men deze verbindingstaaf door A en B aanbrengt, dan wijzigt de ligging van de sluitlijn maar de grootte van de verticale oplegreacties wijzigt niet, dat wil zeggen: de ligging van punt O (nul) blijft onveranderd in de poolfiguur.

b. In de stangenveelhoek tekent men nu een nieuwe sluitlijn die wel door de punten A en B gaat. Dit houdt in dat men in de poolfiguur vanuit het punt O (dat met de eerste pool O werd gevonden) een lijn kan tekenen die evenwijdig is aan AB en waarop alle polen liggen die stangenveelhoeken beschrijven die door A en B gaan. Twee gevallen zijn ingetekend, pool O' geeft dezelfde horizontale componenten in de ophangpunten als pool O (de poolsafstand H is ongewijzigd gebleven); pool O'' veroorzaakt hogere trekkrachten in het koord en in de ophangpunten.

## STANGENVEELHOEK DOOR DRIE GEGEVEN PUNTEN

- a. Het probleem doet zich vooral voor bij het construeren van de druklijn bij bogen, zie In deze paragraaf zal daar verder niet op worden ingegaan, er wordt alleen besproken hoe een stangenveelhoek door drie gegeven punten kan worden getrokken.

- b. Voor de oplossing van het probleem wordt weer gebruik gemaakt van de in 29. besproken eigenschap. Eerst wordt de bundel stangenveelhoeken bepaald die door twee van de drie gegeven punten gaat en van deze bundel wordt dan dat exemplaar bepaald dat ook nog door het derde gegeven punt gaat.

- c. Er zijn vijf even grote verticale krachten gegeven, waarvan de werklijnen zich op onderling gelijke afstanden bevinden. Er wordt gevraagd een stangenveelhoek bij deze vijf krachten te tekenen, die door drie gegeven punten Q, R en S gaat.

- d. Men zet de krachten uit in een poolfiguur met een willekeurig gekozen pool O en tekent de bijbehorende stangenveelhoek sv, waarbij men zich van de drie gegeven punten nog niets behoeft aan de trekken.

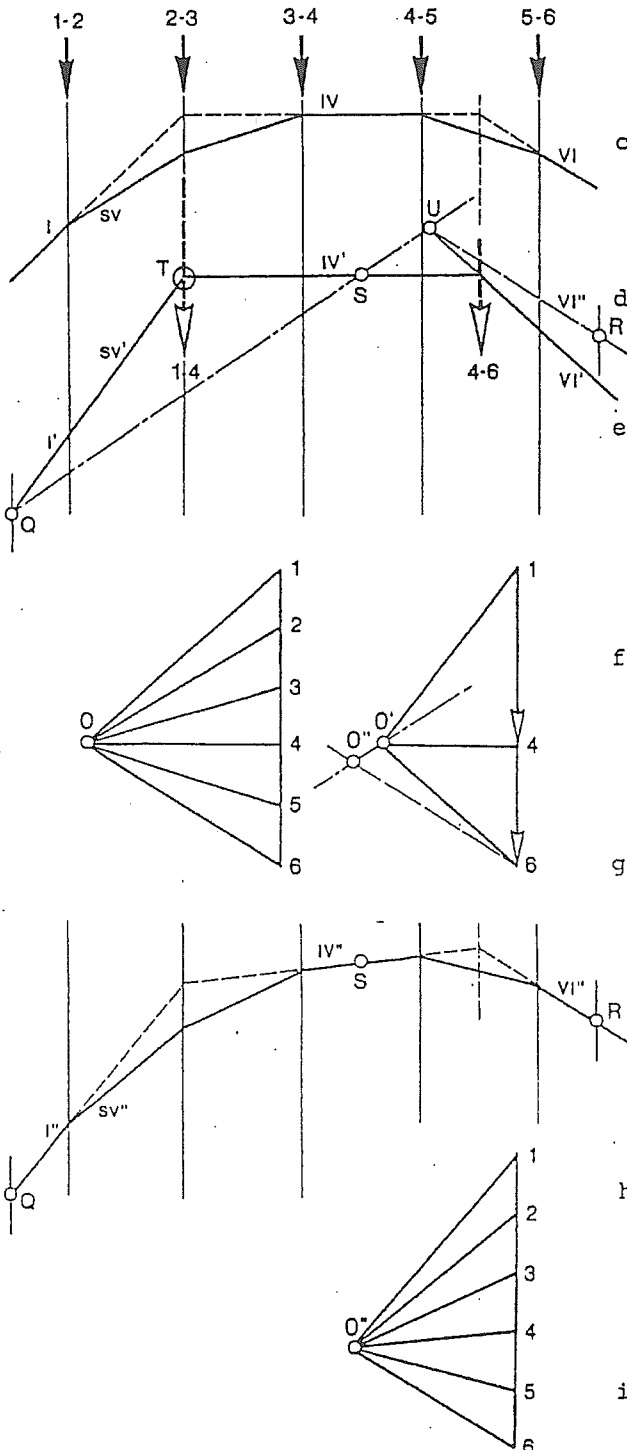
- e. Door punt S worden de krachten in twee groepen verdeeld, drie krachten tussen Q en S en twee krachten tussen S en R. Van elk van deze groepen krachten kan de ligging van de werklijn van de 'deelresultante' worden bepaald. De ligging van de kracht 1-4 wordt bepaald door het snijpunt van de stangen I en IV en de ligging van de kracht 4-6 wordt bepaald door het snijpunt van de stangen IV en VI.

- f. Op de werklijn  $l_{1-4}$  wordt een punt T gekozen en worden de stangen I' (T-Q) en IV' (T-S) getekend. De bijbehorende poolfiguur met pool O' is hierdoor bepaald. Met behulp van deze poolfiguur wordt een stangenveelhoek bij de twee 'deelresultanten' 1-4 en 4-6 getekend. De laatste stang VI' zal hierbij in het algemeen niet door punt R gaan.

- g. De gezochte stangenveelhoek sv'' zal door de punten Q, S en R moeten gaan. De getekende stangenveelhoek sv' gaat al door de punten Q en S. De lijn waarop de snijpunten van de overeenkomstige stangen moeten liggen wordt dus gevormd door de lijn Q-S. Stang VI' snijdt deze lijn in punt U. Dit houdt in dat stang VI'' samenvalt met de lijn U-R zodat de richting van de laatste poolstraal eveneens bekend is. Vanuit punt 6 van de poolfiguur wordt dus een lijn getekend evenwijdig aan R-U en vanuit de pool O' een lijn evenwijdig aan Q-S. Het snijpunt van beide lijnen levert de ligging van pool O''.

- h. Vervolgens is nogmaals de poolfiguur met pool O'' en alle poolstralen getekend. Begint men in punt Q dan zal de stangenveelhoek sv'' dus eveneens door de punten S en R gaan. Ter wille van de tekennauwkeurigheid kan men eerst de stangenveelhoek bij de twee deelresultantes door Q, R en S tekenen (gestippeld in de stangenveelhoek aangegeven).

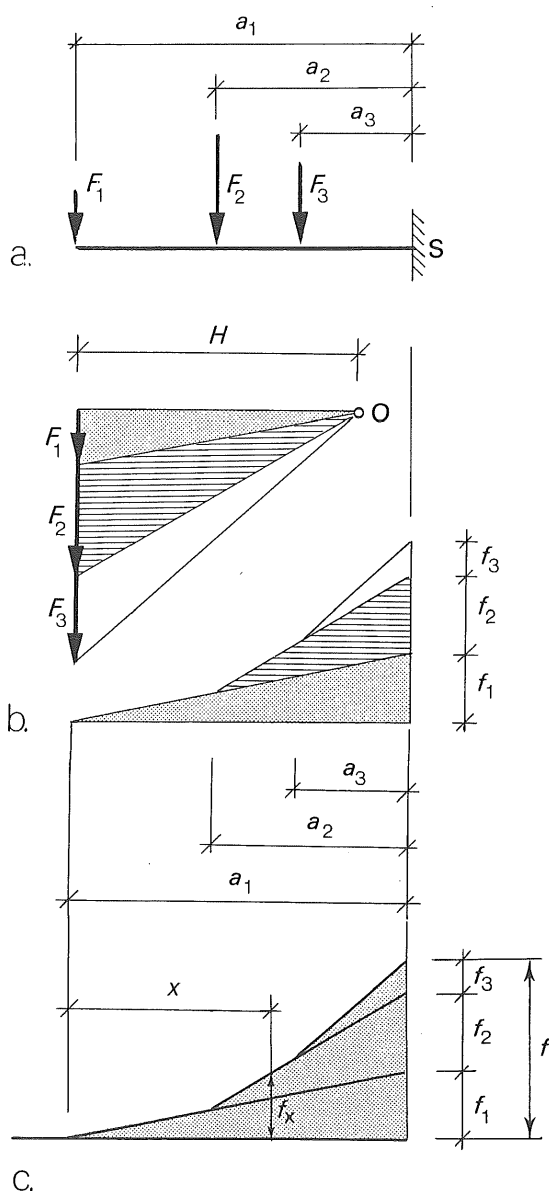
- i. Neem er goede nota van dat bij deze 'bolle' vorm van de stangenveelhoek, in alle stangen drukkrachten optreden, zodat deze krachten nooit door een koord kunnen worden geleverd.



99. Het bepalen van het statisch moment in een snede met behulp van poolfiguur en stangenveelhoek

- a. Om de gedachte te bepalen is een deel van een ligger getekend waarop een aantal verticaal omlaag gerichte krachten aangrijpen. Het statisch moment van deze krachten dient te worden bepaald ten opzichte van een snede S, die we gemakshalve als een inklemming zullen beschouwen.

99



- b. De krachten worden van links naar rechts gaande onder elkaar uitgezet en de pool O wordt ter hoogte van het beginpunt van de kracht \$F\_1\$ gekozen.

De stangenveelhoek kan nu worden getekend; alle stangen worden echter doorgetrokken tot aan de snede S.

Vergelijkt men de figuur voor de stangenveelhoek en de poolfiguur dan is hierin een aantal gelijkvormige driehoeken terug te vinden.

Zo geldt voor de twee gerasterde driehoeken die met de kracht \$F\_1\$ te maken hebben (zie fig. b):

$$\frac{f_1}{a_1} = \frac{F_1}{H} \quad f_1 = \frac{F_1 a_1}{H} = \frac{\Delta M_1}{H}$$

Evenzo geldt voor de twee gearceerde driehoeken:

$$f_2 = \frac{F_2 a_2}{H} = \frac{\Delta M_2}{H}$$

Nu is \$F\_1 a\_1 = \Delta M\_1\$ gelijk aan het statische moment van de kracht \$F\_1\$ ten opzichte van de snede S, terwijl \$F\_2 a\_2\$ het statisch moment voorstelt van \$F\_2\$ ten opzichte van S. Aangezien \$H = \text{constant}\$, zijn de afstanden \$f\_1, f\_2, f\_3 \dots\$ dus een maat voor het aandeel dat de krachten \$F\_1, F\_2, F\_3 \dots\$ leveren aan het statische moment in S.

- c. In feite is de gehele momentenlijn voor de uitkragende ligger al getekend; in elke snede geldt:

$$M_x = f_x \cdot H$$

Als men de afstand \$f\_x\$ tussen de uiterste stangen dus vermenigvuldigt met \$H\$ dan heeft men het buigende moment \$M\_x\$ gevonden. De schaal van het getekende moment hangt af van de schalen waarop de krachten en de lengtematen zijn uitgezet.

Indien men er van uitgaat dat op tekening een lengte van 1 cm overeenkomt met een werkelijke lengte van \$n\_1\$ m, en voor de krachten een lengte van 1 cm met \$n\_2\$ kN dan volgt voor de momentenschaal: 1 cm komt overeen met \$n\_1 \cdot n\_2 \cdot H\$ kNm (\$H\$ opgemeten in cm op de tekening).

Men geeft deze schalen als volgt aan:

- lengteschaal : 1 cm \$\hat{=}\$ \$n\_1\$ m  
 krachtenschaal : 1 cm \$\hat{=}\$ \$n\_2\$ kN  
 momentenschaal : 1 cm \$\hat{=}\$ \$n\_1 \cdot n\_2 \cdot H\$ kNm

100. Grafische bepaling van de momentenlijn bij een ligger op twee steunpunten

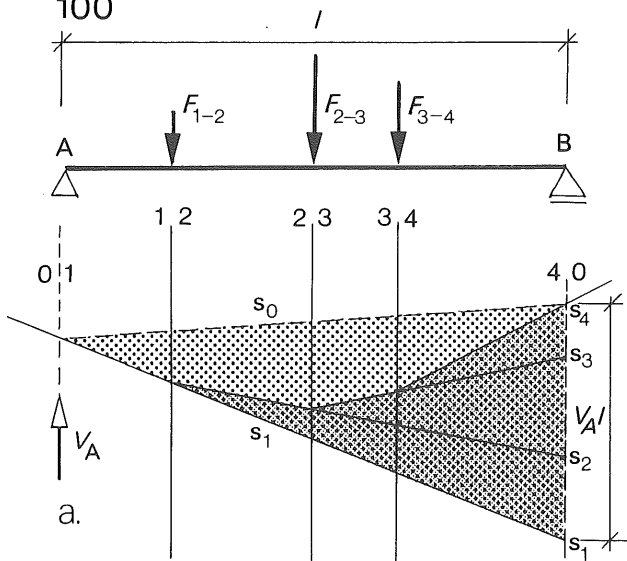
- a. In de figuur is een ligger op twee steunpunten weergegeven die is belast door een aantal puntlasten.

Lengteschaal : 1 cm  $\cong$  1 m

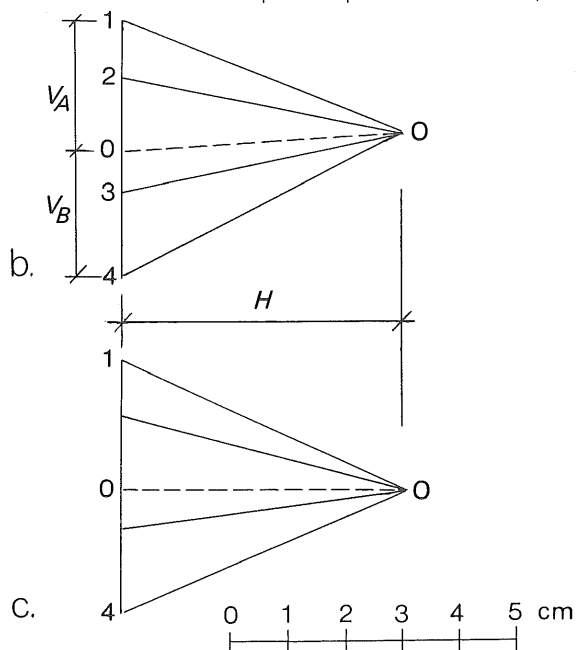
Krachtschaal: 1 cm  $\cong$  2 kN

Om een mooie momentenschaal te krijgen, zal men de afstand H gelijk kiezen aan een geheel aantal cm's. Gekozen is voor H = 5 cm, zodat voor de momentenschaal geldt: 1 cm  $\cong$  1\*2\*5 = 10 kNm

100

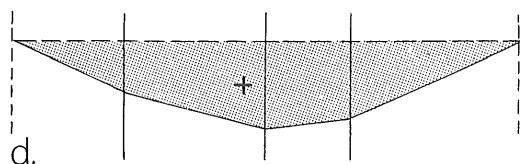


a.



b.

c.



d.

- b. De poolfiguur kan nu worden getekend waarbij de plaats van de pool O in verticale richting niet van wezenlijk belang is. Vervolgens is de stangenveelhoek getekend waarbij (alleen maar voor deze keer) alle stangen weer zijn doorgetrokken tot de werklijn van de rechter oplegging. De sluitlijn kan op de gebruikelijke wijze worden getekend en weer in de poolfiguur worden overgenomen. Hiermee ligt de grootte van de oplegreacties  $V_A$  en  $V_B$  vast.

Beschouwt men nu het statische moment in B van alle uitwendige krachten op de ligger dan wordt het momentenaandeel van  $V_A$  ingesloten door de stangen  $s_0$  en  $s_1$  (resp. evenwijdig aan de poolstralen 0-0 en 1-0). Dit positieve momentenverloop is in de figuur aangegeven met een donker raster. Het momentenaandeel van de kracht  $F_{1-2}$  wordt ingesloten door de stangen  $s_1$  en  $s_2$  die weer evenwijdig zijn aan de poolstralen 1-0 en 2-0. Op overeenkomstige wijze leveren ook de krachten  $F_{2-3}$  en  $F_{3-4}$  hun bijdrage aan het moment. Al deze krachten F leveren een negatief momentenaandeel, dat in de figuur met een licht raster is aangegeven (vergelijk de stangenveelhoek in 99.). Uit de figuur blijkt duidelijk dat het positieve moment ten gevolge van  $V_A$  en het negatieve moment ten gevolge van de drie krachten F elkaar in B precies opheffen en dat over de rest van de ligger het verschil van deze momenten juist het positieve momentenverloop in de ligger aangeeft.

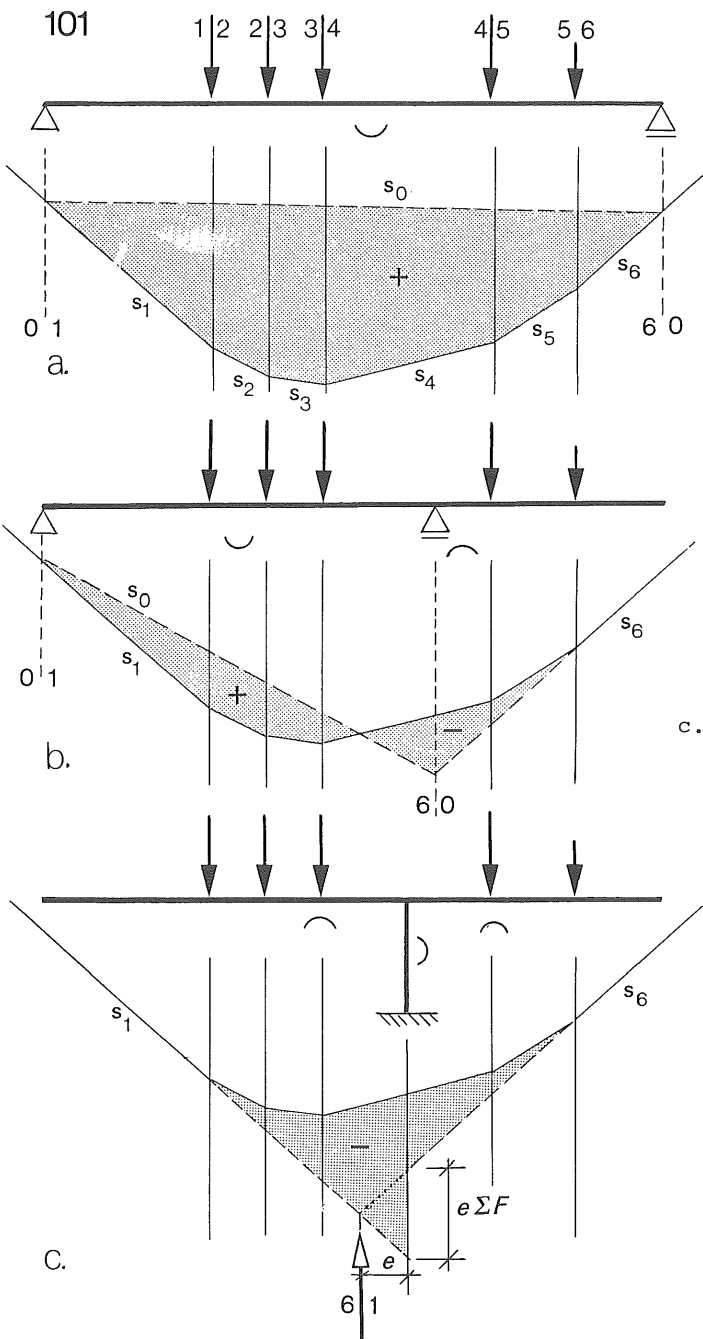
- c. In fig. c is een nieuwe pool O' gekozen (op dezelfde afstand H) recht tegenover punt O om een horizontale nullijn te kunnen tekenen. Het verlengen van de diverse stangen is hier nagelaten.

Het maximale moment blijkt onder de middelste puntlast op te treden. Na opmeten blijkt  $f_{\max} = 1,55$  cm. Het maximale moment bedraagt dus  $M_{\max} = 1,55 \cdot 10 = 15,5$  kNm (NB alle figuren zijn verkleind in de samenvatting opgenomen zodat men bij nasmeten van de bijgetekende schalen dient uit te gaan).

101. Ligger met nog niet vastgelegde plaats van de opleggingen

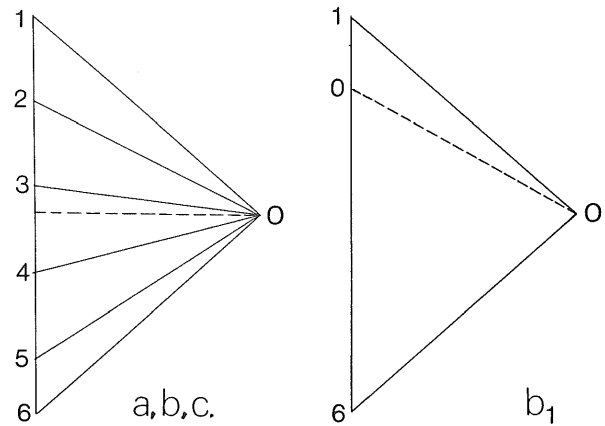
Evenals bij een analytische bepaling van de momentenlijn begint men ook grafisch met de bepaling van de oplegreacties. Door het tekenen van poolfiguur en stangenkromme (zie 95. en 96.) en het trekken van de sluitlijn liggen de oplegreacties vast, maar min of meer bij verrassing is de momentenlijn dan ook al getekend.

Aangezien men de stangenveelhoek construeert uitgaande van uitsluitend bekende uitwendig aangrijpende krachten leent de methodiek zich zeer goed tot het optimaliseren van liggers (met betrekking tot een zo gunstig mogelijk momentenverloop, zie ook 72.).



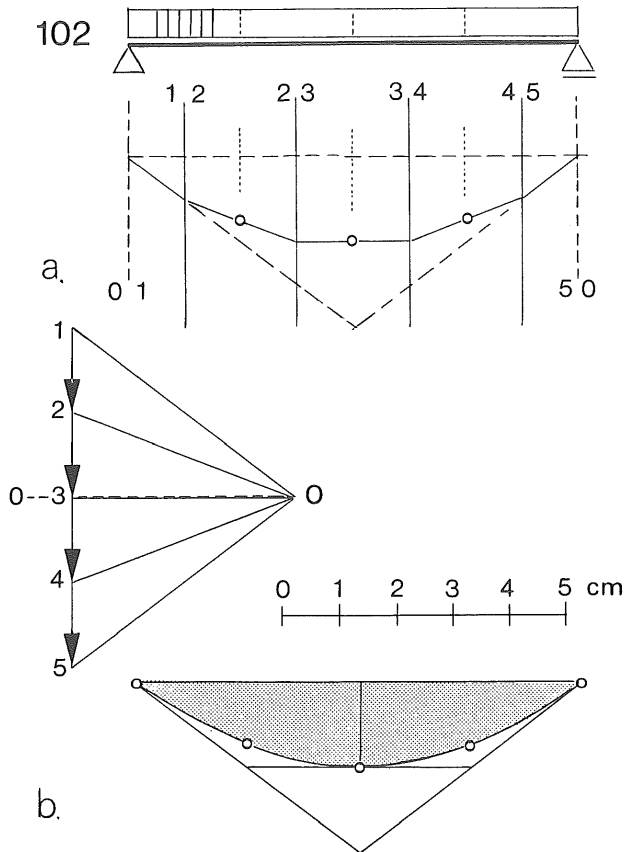
a. In fig. a is het momentenverloop getekend voor een ligger op twee steunpunten. Als men besluit de opleggingen iets dichters bij elkaar te plaatsen of iets verder uit elkaar dan kan direct weer de nieuwe sluitlijn worden getrokken zodat de consequenties eveneens direct duidelijk zijn.

b. Eén oplegging is een stuk naar binnen verplaatst, zodat een ligger met een overstek ontstaat. Poolfiguur en stangenveelhoek blijven onveranderd, de sluitlijn vindt men door de eerste stang  $s_1$  de werklijn van de linker oplegreactie te laten snijden en de laatste stang  $s_6$  de werklijn van de rechter oplegreactie. De verbindingslijn van beide snijpunten levert de sluitlijn  $s_0$ , die herhaald is in de poolfiguur  $b_1$ . De grootte van de oplegreacties wordt dan aangegeven door de vectoren 0-1 (links) en 6-0 (rechts). Het meest opvallende is echter de drastische vermindering van de grootte van de buigende momenten, enerzijds door het verkleinen van de overspanning, anderzijds door het introduceren van een overstek.



c. De ligger wordt ingeklemd in een kolom. De delen links en rechts van de kolom werken elk als een ingeklemde ligger (zie 99.). Beide inklemningsmomenten zijn niet even groot zodat ook de kolom nog een buigend moment moet overbrengen, ter grootte van de zogenaamde 'momentensprong' (dat wil zeggen, ter grootte van het verschil in inklemningsmomenten. Men kan de grootte van dit moment opmeten uit de figuur. Men heeft echter nog een controle. De kracht 6-1 die evenwicht maakt met de belastingen (dus gelijk is aan de verticale oplegreactie) heeft een werklijn die gaat door het snijpunt van de uiterste stangen  $s_1$  en  $s_6$  (zie 93.) Deze werklijn heeft een afstand  $e$  tot de kolom, zodat er in de kolom een buigend moment moet werken ter grootte  $M = e \cdot \Sigma F$

102

102. Liggers onder gelijkmatig verdeelde belasting

De belasting wordt in een aantal (lieftst gelijke) moten verdeeld waarbij de deellijnen tussen de moten in ieder geval op die plaatsen aanwezig moeten zijn waar de maximale momenten worden verwacht; bij de ligger op twee steunpunten dus in het midden. Ter plaatse van de deellijnen van de moten wordt immers de juiste waarde van het moment bereikt, zie 57.

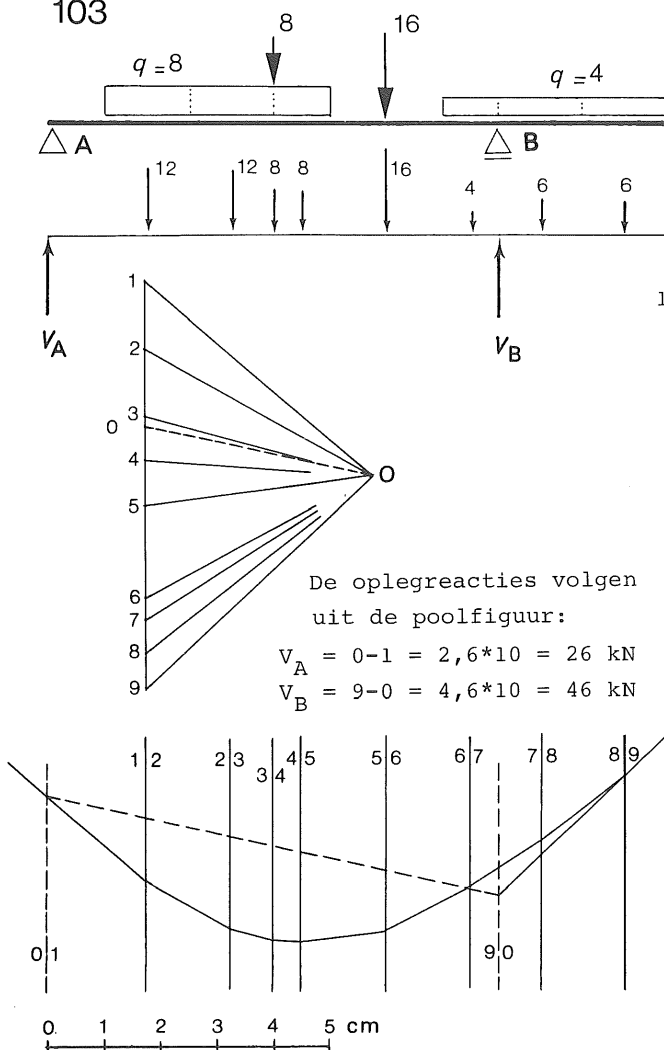
Bij de ligger is de belasting in 4 moten verdeeld die elk als 1,5 cm in de poolfiguur zijn weergegeven. Hieruit volgt  $\frac{1}{4} ql \approx 1,5$  cm dus de krachtenschaal is gelijk aan:  $1 \text{ cm} \approx \frac{1}{6} ql$ . Voor de lengteschaal geldt:  $1 \text{ cm} \approx \frac{1}{8} l$  terwijl de poolsafstand gelijk is aan  $H = 4$  cm. Dit levert een momentenschaal:  $1 \text{ cm} \approx \frac{1}{6} ql * \frac{1}{8} l * 4 = \frac{1}{12} ql^2$ .

Uit de stangenveelhoek volgt een maximaal moment ter plaatse van het middendeel van 1,5 cm. Dit komt dus overeen met

$$M_{\max} = 1,5 * \frac{1}{12} ql^2 = \frac{1}{8} ql^2$$

In fig. b is een vloeiende momentenlijn getrokken door de vijf exact bekende punten die met cirkeltjes zijn aangegeven (deellijnen van de belasting). Aangezien de stangen van de stangenveelhoek hier ook raken aan de werkelijke momentenlijn kan deze met zeer goede nauwkeurigheid worden getekend.

103

103. Liggers belast door gelijkmatig verdeelde belasting en puntlasten.

Het voorbeeld van 57 is hier nogmaals uitgewerkt met behulp van poolfiguur en stangenveelhoek. In feite was de uitwerking van 57. al min of meer een analytische vertaling van de grafische methode.

Lengteschaal :  $1 \text{ cm} \approx 1 \text{ m}$

Krachtenschaal:  $1 \text{ cm} \approx 10 \text{ kN}$   $H = 4 \text{ cm}$

Momentenschaal:  $1 \text{ cm} \approx 1 * 10 * 4 = 40 \text{ kNm}$

$M_{\text{pos}} = 1,65 * 40 = 66 \text{ kNm}$  (68)

$M_{\text{neg}} = 0,48 * 40 = 19 \text{ kNm}$  (18)

De extreme momenten volgen door opmeten, tussen haakjes zijn de analytisch berekende waarden weergegeven. De afwijkingen van resp. 3 % en 5 % zijn alleszins acceptabel. Wil men nauwkeuriger werken dan kan men de schalen groter kiezen. Op deze grafische manier heeft men wel heel wat priegelrekenwerk uitgespaard.

104

104. Vergelijking van de krachtswerking in kabels en in liggers

Essentieel voor de krachtswerking in kabels (koorden) is het feit dat de ophangpunten van de kabels horizontale krachten moeten kunnen leveren. Zonder dat kan een kabel niet functioneren.

Bij een ligger behoeft maar één oplegging horizontale krachten op te kunnen nemen, en bij uitsluitend verticale krachten is zelfs dat niet nodig.

Verder kan de kabel alleen maar werkzaam zijn als hij onderuitzakt, terwijl de verplaatsingen bij liggers vrijwel niet te zien zijn.

Zowel bij een ligger als bij een kabel kan men een snede aanbrenge en het statische moment bepalen dat alle krachten op een van de afgesneden gedachte delen op deze snede uitoefenen. Bij een ligger levert dit het buigende moment in de ligger. Een kabel is echter niet in staat om buigende momenten over te brengen. Maakt men dus het statische moment op om een punt van de belaste kabel dan moet dit gelijk zijn aan nul.

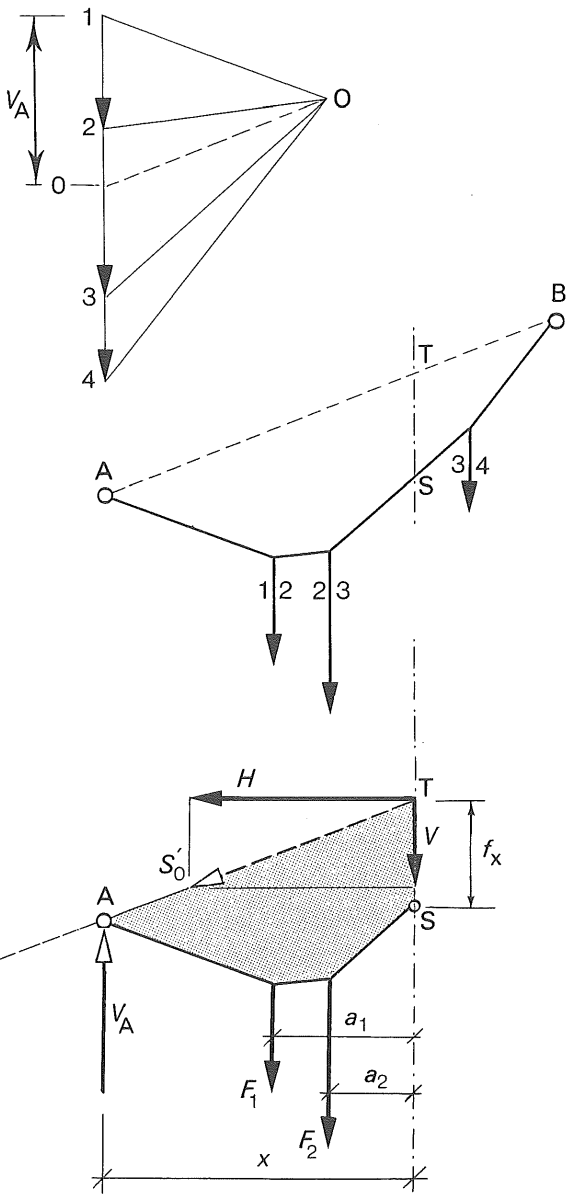
a. In fig. a is de vorm van zo'n kabel weergegeven, de vorm wordt bepaald door de verticale afstand tussen kabel en sluitlijn A-B.

b. In fig. b is het gedeelte van de kabel beschouwd links van de snede S-T (oppervlak tussen kabel en sluitlijn gearceerd weergegeven). De kabelkrachten bij de ophangpunten zijn ontbonden langs  $s_0$  en in de verticale richting.

Alle verticale krachten links van de snede ( $V_A$  en de krachten  $F$ ) leveren een statisch moment dat gelijk is aan het buigende moment  $M_x$  in een ligger. Door de kracht  $S_0$  wordt dan een tegenwerkend moment geleverd. Verplaatst men  $S_0$  tot de aangebrachte snede en ontbindt men de kracht dan in zijn verticale en zijn horizontale component dan is het ontlastende moment gelijk aan  $H \cdot f_x$  zodat moet gelden:

$$f_x = \frac{M_x}{H}$$

De kabel zakt zo ver onderuit dat de kracht  $S_0$  een moment kan leveren dat juist evenwicht maakt met het moment ten gevolge van alle verticale krachten. De kabel neemt dus de vorm aan van de momentenlijn bij een ligger.



$$\begin{aligned} \Sigma M_S = 0 : \\ +V_A \cdot x - F_1 a_1 - F_2 a_2 - H \cdot f_x = 0 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{M_x} \\ M_x = H \cdot f_x \end{aligned}$$



### 2.3.7 RESULTERENDE KRACHT EN EVENWICHTMAKENDE KRACHT

#### Resultante van twee krachten

De twee krachten worden vervangen door een derde kracht die dezelfde uitwerking heeft: de *resultante*. Deze wordt bepaald met behulp van het parallellogram van krachten, zie fig. 1a.

Voor de krachtendriehoek geldt, zie fig. 1b: de vector die de resultante van twee krachten voorstelt, loopt van het beginpunt van de eerste kracht naar het eindpunt van de tweede kracht.

Ter wille van de overzichtelijkheid worden krachten met zwarte en witte pijlen weergegeven.

Als de 'basiskrachten' met getrokken lijnen en zwarte pijlpunten zijn weergegeven, dan is de resultante met een gestippelde lijn en een witte pijlpunt weergegeven.

#### Evenwicht met twee krachten:

Aan de twee krachten wordt een derde kracht toegevoegd, die de werking van de eerste twee krachten opheft.

Deze evenwichtmakende kracht volgt eveneens uit het parallellogram van krachten; ze is tegengesteld gericht aan de resultante, zie fig. 2a.

Voor de krachtendriehoek geldt, zie fig. 2b: de vector die evenwicht maakt met twee krachten, loopt van het eindpunt van de tweede kracht naar het beginpunt van de eerste kracht. Men zegt: 'de krachtendriehoek is gesloten'.

Als de 'basiskrachten' weer met getrokken lijnen en zwarte pijlpunten worden weergegeven, dan wordt de evenwichtmakende kracht eveneens met een getrokken lijn weergegeven, maar dan wel met een witte pijlpunt.

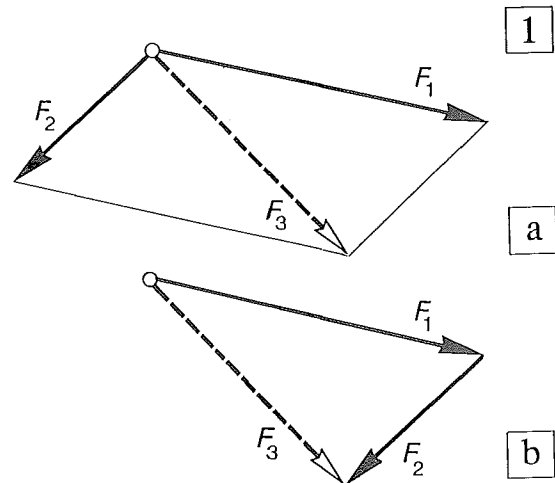


Fig. 1 Resultante van twee krachten  
a. parallellogram van krachten  
b. krachtendriehoek

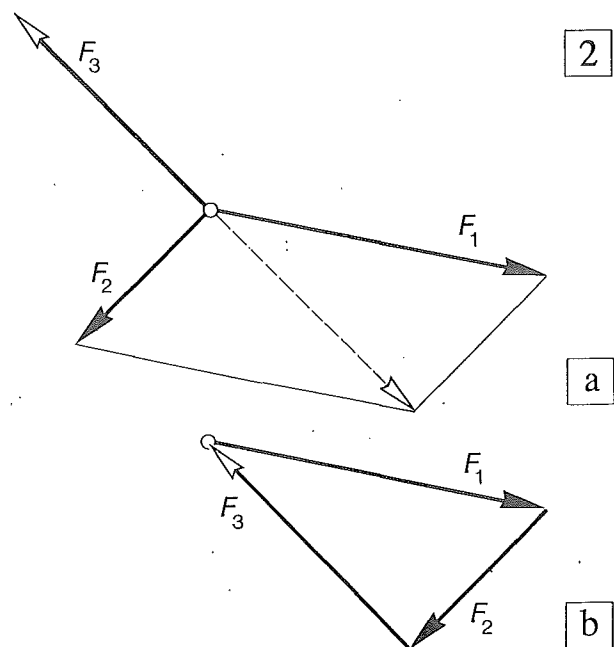


Fig. 2 Evenwicht met twee krachten  
a. parallellogram van krachten  
b. krachtendriehoek

2.3.8 TOEPASSINGEN

De bewerkingen van [016] zullen we regelmatig toepassen bij de berekening van vakwerken, kabelconstructies, driescharnierspanten etc. Vooruitlopend op deze materie geven we alvast twee voorbeelden.

Voorbeeld 1: Kabelconstructie

De vorm van de kabelconstructie is weergegeven in fig. 3a. De grootte en richting van de kabelkracht in punt A is bekend, zie fig. 3b. Deze kracht moet worden opgenomen door de poten AB en AC. De grootte van de krachten in de poten wordt gevraagd.

Oplissing:

Trek door de eindpunten van de kracht  $F$  klakkeloos lijnen evenwijdig aan de richtingen A-B en A-C, zie fig. 3c. Kijk waar de lijnen elkaar snijden en teken een gesloten krachtendriehoek door de vectoren elkaar 'na te laten lopen'. De reactiekrachten in A-B en A-C zijn dan bekend. Controleer de uitkomst vervolgens met behulp van een gedachtenmodel. In fig. 3d is hiervoor een 'speelmodel' genomen.

Als we de 'bok' B-A-C los op de ondergrond plaatsen waarbij hij niet kan verschuiven, dan zal de trekkracht  $F$  hem om punt C laten kantelen. Om de zaak in evenwicht te houden moeten we dus trekken aan A-B en drukken op A-C.

Voorbeeld 2: Nulstaven bij vakwerken

In fig. 4a is een vakwerk gegeven dat belast is door één puntlast.

Gevraagd: welke kracht treedt op in staaf 1.

Oplissing: Als we de kracht  $F$  in punt C willen ontbinden hebben we 5 richtingen tot onze beschikking, daar komen we niet verder mee

In de onderrand zullen de staven 2 en 3 zeer zeker (trek)krachten moeten overbrengen. Als we de grootte van de staafkracht  $S_2$  nu bekend veronderstellen en deze kracht evenwicht laten maken met  $S_1$  en  $S_3$ , dan blijkt er maar één mogelijkheid voor een gesloten krachtendriehoek te zijn, zie fig. 4b:

$S_2 = S_3$  en  $S_1 = 0$ .

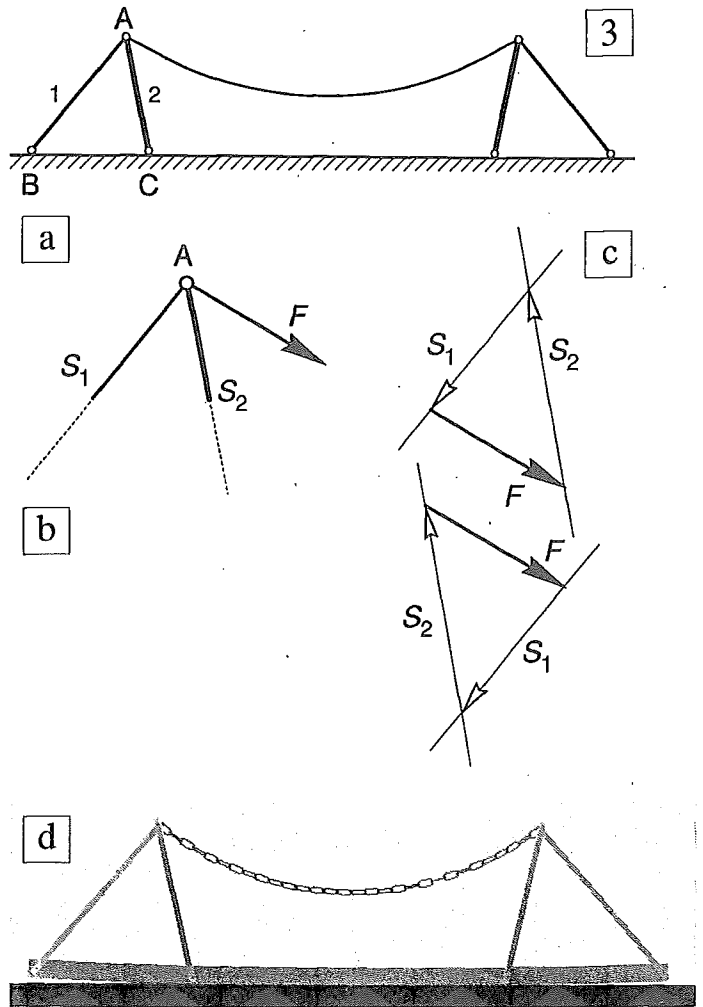


Fig. 3 Kabelconstructie

- a. Schema
- b. De grootte en richting van de trekkracht in punt A is gegeven
- c. Tekenen van de krachtendriehoeken
- d. Speelmodelletje voor een controle van trek- en drukkrachten

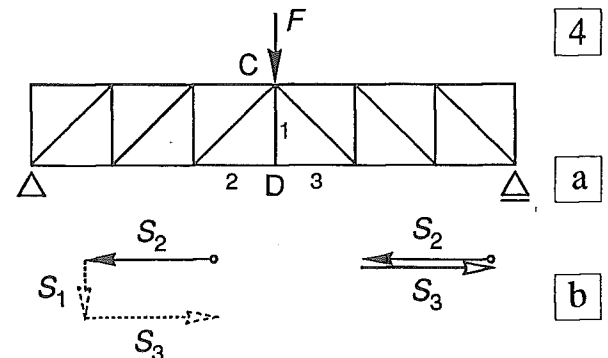


Fig. 4 Vakwerk belast door één puntlast

- a. Schema van het vakwerk
- b. Krachtendriehoek voor punt D kan alleen worden gesloten als  $S_1 = 0$

### 2.6.1 ALGEMEEN

Een aantal willekeurig gelegen krachten – die al dan niet door één punt mogen gaan – kan ook worden samengesteld met behulp van een bijzondere grafische constructie, aangeduid als *poolfiguur en stangenveelhoek* (de stangenveelhoek wordt ook wel stangenkromme genoemd). Dit procédé wordt meestal toegepast voor evenwijdige of min of meer evenwijdige krachten.

Op een ingenieuze manier wordt elke kracht ontbonden in twee andere krachten, en wel zodanig dat alle nieuwe krachten – op twee na – tegen elkaar wegvallen. De twee overblijvende krachten kunnen dan op de gebruikelijke manier grafisch worden samengesteld.

Een goed inzicht in deze grafische constructie is uitermate nuttig, omdat hiermee op analoge wijze een aantal problemen van (schijnbaar) geheel andere aard kan worden opgelost.

Vooruitlopend op een latere bespreking kunnen hiervan worden genoemd:

- het bepalen van de krachtswerking in coördinaten en kabels,
- het bepalen van de krachtswerking in bogen (twee-dimensionaal probleem),
- het bepalen van de krachtswerking in koepels (drie-dimensionaal probleem),
- het bepalen van de druklijn in constructies,
- het grafisch bepalen van de *momentenlijn* bij liggers,
- het grafisch bepalen van de *doorbuigingslijn* bij liggers.

De uitleg van het procédé wordt gegeven voor het basisgeval: het samenstellen van een aantal willekeurig gerichte krachten

Het meest voorkomende geval van een aantal evenwijdige krachten wordt behandeld in [037]. Op het bepalen van de krachtswerking in coördinaten en kabels wordt kort ingegaan in [039], omdat dit geval sprekend op de voorgaande gevallen lijkt.

## 2.6.2 CONSTRUCTIE VAN DE POOLFIGUUR

Van een aantal krachten is de grootte en de richting gegeven, evenals de ligging van de werklijnen, zie fig. 1. Van deze krachten moet de resultante worden bepaald in grootte en ligging.

Voor de oplossing van het probleem gaan we als volgt te werk, zie fig. 2a.

Vanuit een willekeurig punt  $Q$  – buiten de werklijnen van de krachten gelegen – worden alle krachten achter elkaar uitgezet in een krachtenveelhoek. De richting en grootte van de *resultante* van alle krachten ligt hierdoor al vast, maar de ligging van de werklijn nog niet.

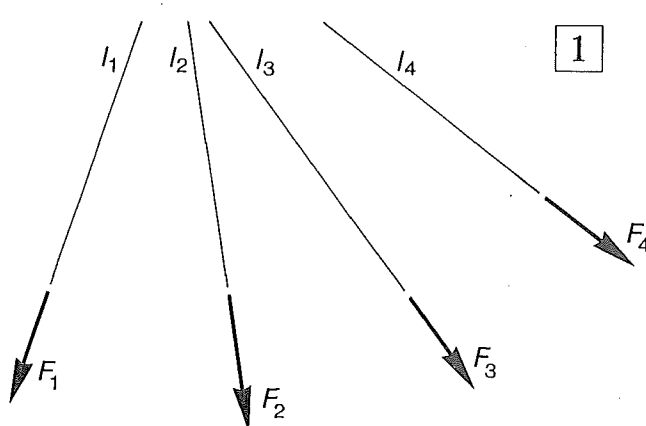


Fig. 1 Vier krachten, gegeven door hun grootte en de ligging van hun werklijnen

Op enige afstand van de krachtenveelhoek kiezen we een willekeurig punt  $O$ : de *pool* (fig. 2b). De pool  $O$  wordt door middel van de zgn. poolstralen verbonden met de begin- en eindpunten van de opeenvolgende krachten in de krachtenveelhoek. De zo ontstane figuur wordt *poolfiguur* genoemd. Hierin stellen alle lijnstukken krachten voor op dezelfde schaal als voor de uitgezette krachten is aangehouden.

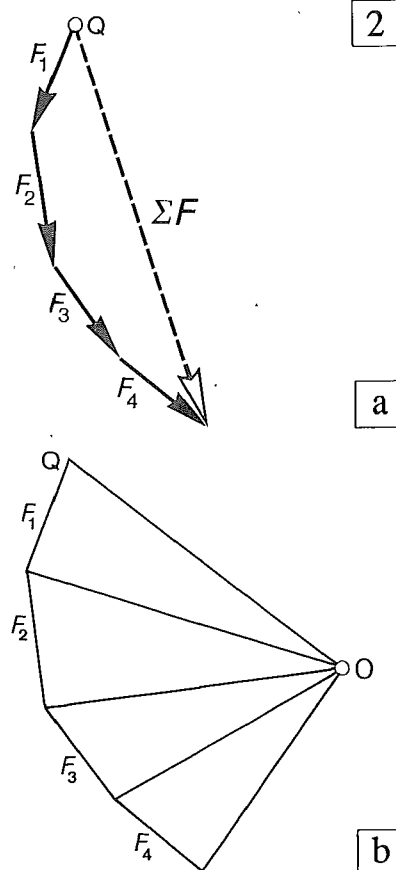


Fig. 2 Krachten uitgezet in een krachtenveelhoek  
 a. Oorspronkelijke krachten aangegeven met zwarte pijlen; de resultante door een witte pijl  
 b. Krachten alleen aangegeven door lijnstukken; tevens is de pool toegevoegd en zijn alle poolstralen getrokken

### 2.6.3 CONSTRUCTIE VAN DE STANGENVEELHOEK

Voor de constructie van de stangenveelhoek is het aan te bevelen om de krachten op een bepaalde manier te nummeren, zie fig. 1.

In de poolfiguur worden de achter elkaar uitgezette krachten aan het begin- en eindpunt opeenvolgend genummerd.

Zo wordt de kracht  $F_1$  aangeduid als 1-2, de kracht  $F_2$  als 2-3 enz. De hoofdletter O bij de pool wordt hierbij beschouwd als het cijfer 0.

Over het algemeen worden de pijlpunten in de poolfiguur niet getekend. Terwille van het inzicht is dit in enkele figuren wèl gedaan.

In de tekening waar de krachten met hun werklijnen zijn weergegeven, worden de krachten op een overeenkomstige manier genummerd.

De cijfers worden dan meestal niet aan het begin- en eindpunt van de pijl geplaatst maar naast elkaar weergegeven, zie fig. 2.

1

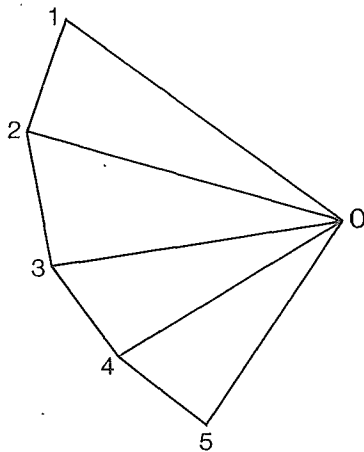
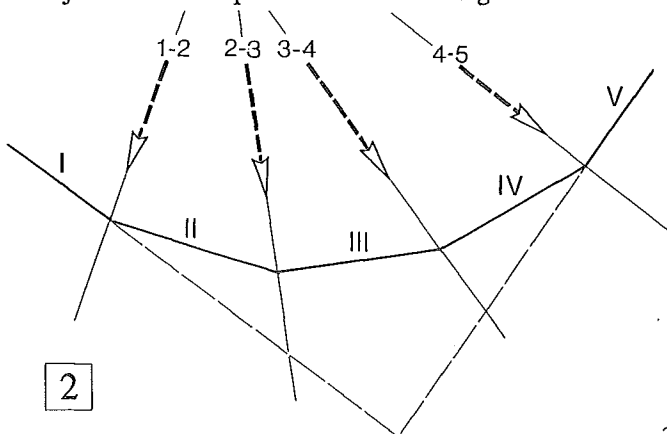


Fig. 1 Poolfiguur

Fig. 2 Stangenveelhoek  
cijfer dat het beginpunt van de vector aangeeft links  
cijfer dat het eindpunt van de vector aangeeft rechts



2

De constructie van de stangenveelhoek in fig. 2 begint door links van de werklijn van de eerste kracht 1-2, een lijn te tekenen (stang I), die evenwijdig is aan de poolstraal 1-0, tot deze stang de werklijn van kracht 1-2 snijdt.

Vanaf dit punt wordt stang II getekend, evenwijdig aan poolstraal 2-0, tot deze stang de werklijn van kracht 2-3 snijdt.

Zo gaan we door, tot tenslotte rechts van de laatste kracht, een lijn wordt getekend die evenwijdig is aan de laatste poolstraal.

Om de werking van de stangenveelhoek te kunnen doorzien beschouwen we de kracht 2-3 in de stangenveelhoek, zie fig. 2. Deze kracht bevindt zich tussen de stangen II en III.

Beschouwen we dezelfde kracht in de poolfiguur (fig. 1) dan vormen de krachten 2-3, 3-0 en 0-2 een gesloten krachtendriehoek. In deze richting maken de krachten dus evenwicht met elkaar.

Draaien we de richting van de laatste twee krachten om, dan zijn de krachten 2-0 en 0-3 juist gelijk aan de ontbondenen van de kracht 2-3, zie ook fig. [016-1b]. Hierbij is de kracht 2-0 evenwijdig aan stang II en de kracht 0-3 evenwijdig aan stang III.

In fig. 3 is de poolfiguur ter verduidelijking in een viertal afzonderlijke gesloten krachtendriehoeken opgesplitst, waarbij elke oorspronkelijke kracht is ontbonden in de richting van de aanliggende stangen.

3

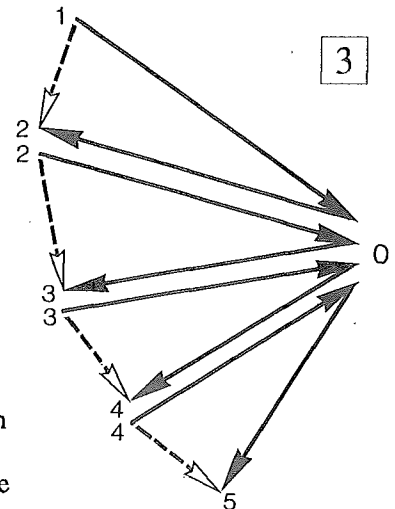


Fig. 3  
Poolfiguur gesplitst  
in afzonderlijke  
krachtendriehoeken.

Elke witte kracht kan worden vervangen door zijn twee zwarte componenten

2.6.4 BEPALING VAN DE RESULTANTE

De volgende stap is een gedachten-experiment. Elke kracht in de stangenveelhoek wordt op de onder [034] aangegeven wijze vervangen door zijn componenten langs de aangrenzende stangen, zie fig. 4.

Ter wille van een beter overzicht zijn in fig. 4 alle krachten in de stangenveelhoek weergegeven op 1/4 van de grootte die in alle andere figuren is aangehouden.

Beschouwt men stang II van de stangenveelhoek, dan werkt langs deze werklijn een kracht 0-2 naar links en een even grote kracht 2-0 naar rechts. Beide krachten heffen elkaar dus op. Dit geldt voor alle stangen, behalve voor de eerste en de laatste stang.

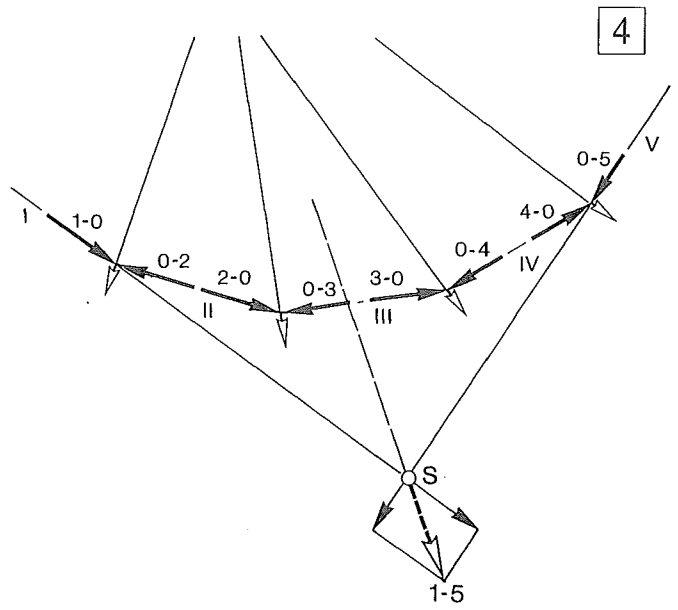


Fig. 4 Vervanging van alle oorspronkelijke krachten door hun componenten langs de aanliggende stangen

Alle oorspronkelijke krachten zijn dus vervangen door de kracht 1-0 langs stang I en de kracht 0-5 langs stang V. Het snijpunt S van de stangen I en V is dus het snijpunt van de werklijnen van beide krachten en levert een punt van de werklijn van de resultante, zie fig. 4.

De grootte en richting van deze resultante 1-5 is direct uit de poolfiguur af te lezen, zie fig. 5.

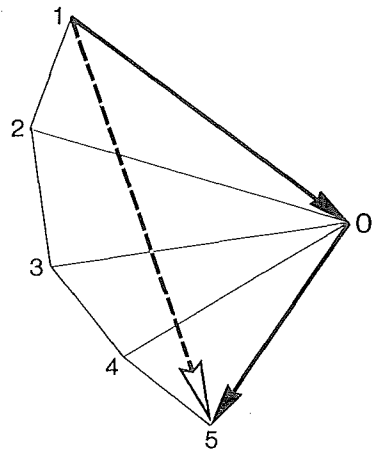


Fig. 5 Poolfiguur met de twee resterende krachten 1-0 en 0-5, die tezamen de resultante 1-5 leveren

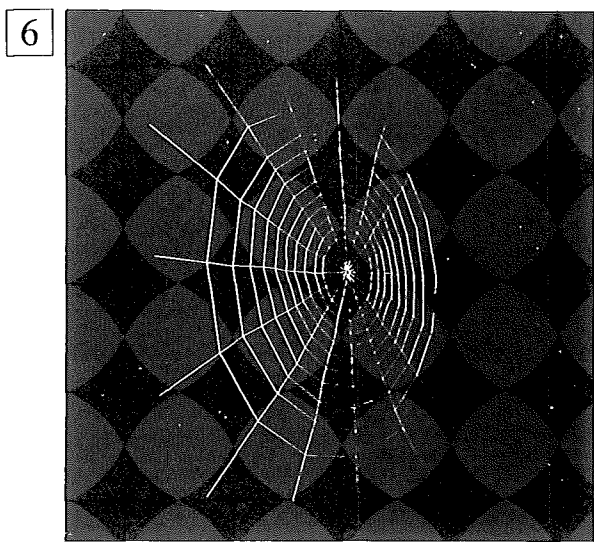


Fig. 6 Een voorbeeld uit de natuur van een groot aantal gesloten stangenveelhoeken

## 2.6.5 VOORBEELDEN

In fig. 1 zijn drie krachten gegeven, waarvan de eerste en de derde kracht samen een koppel vormen. De resultante van de drie krachten is dus gelijk aan de tweede kracht, waarbij alleen de werklijn zijdelings is verplaatst.

In fig. 2 zijn dezelfde krachten getekend, alleen de derde kracht is van teken omgedraaid.

In eerste instantie lijkt de keuze van de pool in fig. 2a alleszins acceptabel. De pool ligt echter in het verlengde van de resultante van de drie krachten. Stang I en IV zijn dan evenwijdig aan elkaar en leveren op deze wijze geen snijpunt.

Om dit te verbeteren wordt de pool op een andere plaats gekozen, zie fig. 2b. Het snijpunt van de stangen I en IV kan nu wel worden bepaald.

Aangezien de som van de verticale componenten van de eerste en de derde kracht evenwicht maakt met de verticale component van de tweede kracht, loopt de resultante horizontaal.

*Enkele praktische wenken:*

- Let er bij het tekenen van de poolfiguur op dat de pool niet min of meer in het verlengde van een van de oorspronkelijke krachten ligt, de constructie van de stangenveelhoek wordt dan nogal moeizaam en onnauwkeurig.
- Door de pool aan de andere zijde van de krachten te kiezen kan de holle vorm van een stangenveelhoek overgaan in een bolle vorm en omgekeerd.
- De stangenkromme wordt van werklijn naar werklijn getekend. Als de zaak niet goed past kunnen een aantal maatregelen worden getroffen:
  - 1 het verlengen van de werklijnen,
  - 2 op een ander punt beginnen met de stangenveelhoek,
  - 3 het kiezen van een andere pool.

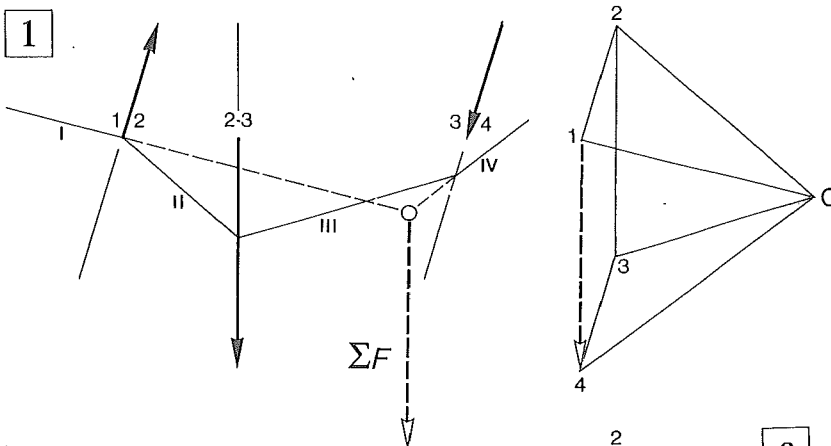


Fig. 1  
Samenstellen van een verticale kracht en een koppel

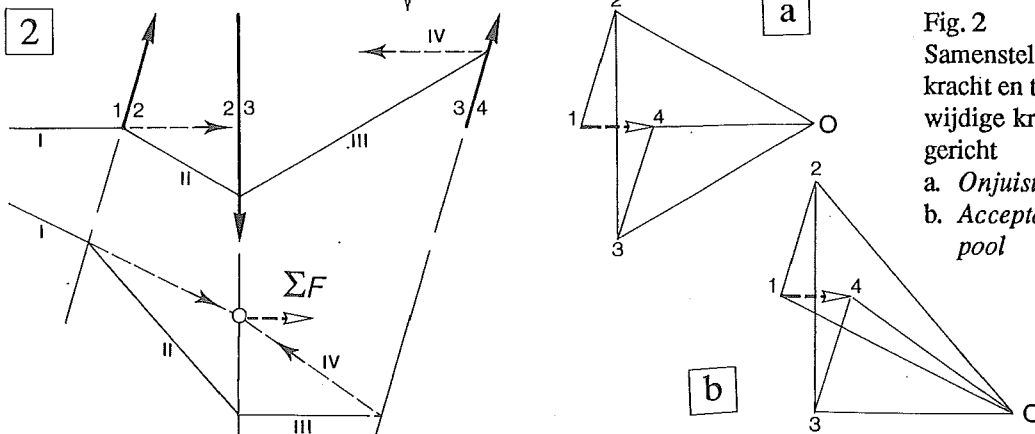
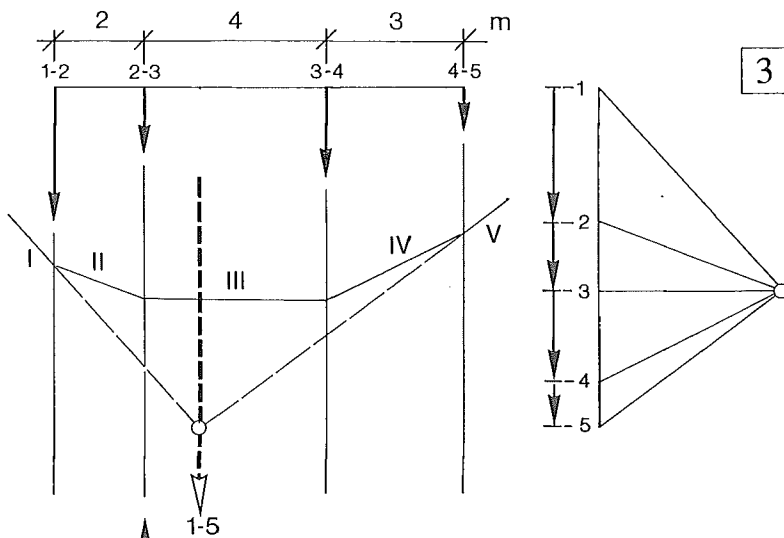


Fig. 2  
Samenstellen van een verticale kracht en twee even grote evenwijdige krachten die gelijk zijn gericht  
a. Onjuiste keuze van de pool!  
b. Acceptabele keuze van de pool

### 2.6.6 STANGENVEELHOEK BIJ EVENWIJDIGE KRACHTEN

De meest voorkomende toepassing van poolfiguur en stangenveelhoek is met evenwijdige krachten. Hiervan zijn drie voorbeelden gegeven.

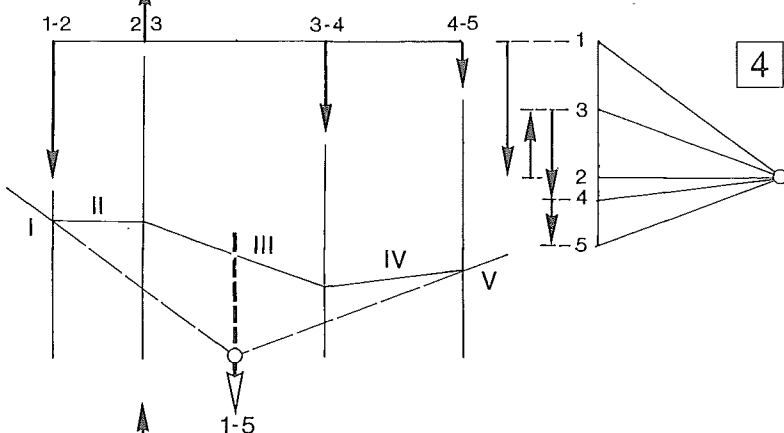
De werkwijze is geheel analoog aan die welke is beschreven onder [033 t/m 035]. Bij krachten met verschillend teken overlappen deze elkaar gedeeltelijk in de poolfiguur, zoals in de figuren 4 en 5. De wijze van nummeren is echter eenduidig; terwille van het overzicht zijn de krachten direct links van de poolfiguur nogmaals afzonderlijk weergegeven.



3

Fig. 3 Voorbeeld I

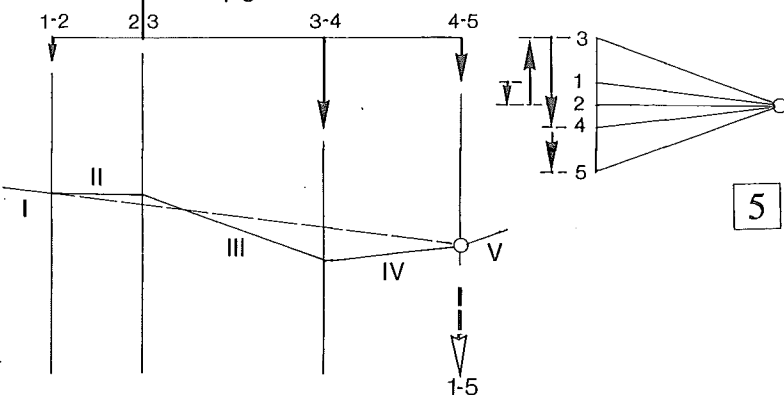
Alle krachten werken verticaal omlaag. In de poolfiguur is de pool – volkomen willekeurig – tegenover het eindpunt van kracht 2-3 gekozen.



4

Fig. 4 Voorbeeld II

De ligging van de werklijnen en de absolute grootte van de krachten is dezelfde als in voorbeeld I, maar de tweede kracht is in richting gewijzigd (van teken omgedraaid).



5

Fig. 5 Voorbeeld III

Ten opzichte van voorbeeld II is alleen de eerste kracht in richting en grootte gewijzigd. Het voorbeeld komt nu geheel overeen met dat van [026-1].



## 2.6.7 KRACHTSWERKING IN KOORDEN

Een koord, een touw, een kabel of een ketting kunnen alleen maar trekkrachten overbrengen. Dit betekent dat in elk punt van een koord waar een uitwendige kracht op het koord aangrijpt, de trekkrachten in de aangrenzende delen van het koord evenwicht moeten maken met de uitwendige kracht.

Met andere woorden: voor elk aangrijpingspunt van een kracht moet de bijbehorende krachten-driehoek gesloten zijn.

Alle mogelijke vormen van een dergelijk koord kunnen weer worden bepaald met behulp van een poolfiguur en een stangenveelhoek, zoals besproken in de voorgaande paragrafen.

Er is echter één essentieel verschil; de oorspronkelijke krachten worden niet langer *vervangen* door krachten langs de stangen, maar we bepalen juist de stangkrachten die *evenwicht* maken met de oorspronkelijke krachten.

De krachtswerking in het koord zal worden uiteengezet aan de hand van hetzelfde stelsel krachten dat in [033] is gebruikt. Poolfiguur en stangenveelhoek zijn eveneens gelijk gekozen.

In de wijze van tekenen en construeren komt geen enkele verandering, zie fig. 1a en 1d. Alleen de interpretatie is verschillend.

De *poolfiguur* geeft nog steeds alle benodigde krachten weer, maar de *stangenveelhoek* geeft nu de vorm van het koord weer onder invloed van de uitwendige krachten.

In figuur 1b is het evenwicht beschouwd van punt  $P_2$  van het koord. De drie bijbehorende krachten omsluiten het gerasterde gebied van de poolfiguur (fig. 1d). Deze krachtdriehoek is gesloten zodat de krachten evenwicht met elkaar maken.

De uitwendige kracht 2-3 wordt in evenwicht gehouden door de trekkracht 0-2 langs stang II en de trekkracht 3-0 langs stang III. Deze trekkrachten worden door het koord geleverd.

Omgekeerd werkt op het koord tussen de punten  $P_2$  en  $P_3$  – dus langs stang III – in punt  $P_2$  de trekkracht 0-3 en in punt  $P_3$  de trekkracht 3-0.

Kennelijk is ook elk gedeelte van het koord weer in evenwicht, zie fig. 1c.

Als we het koord bevestigd denken in de punten  $P_0$  en  $P_5$ , dan moeten de trekkrachten 0-1 en 5-0 het koord in evenwicht houden. Ook deze krachten zijn in de poolfiguur in richting en grootte aangegeven. Het zijn de twee reactiekrachten die evenwicht maken met de gegeven uitwendige krachten, zie fig. 1a en 1d.

Voor een praktijkgeval zullen we moeten nagaan of deze reactiekrachten door de punten  $P_0$  en  $P_5$  kunnen worden geleverd.

Als men het koord strak spant – waardoor de pool sterk naar rechts verschuift – kunnen deze reactiekrachten en de trekkrachten in het koord veel groter zijn dan de 'actie-krachten'  $F_1$  t/m  $F_4$  die op het koord aangrijpen.

In de vorm waarin het koord en de krachten zijn getekend, zal het probleem zich niet zo vaak voordoen. Men kan weer denken aan de twee groepen touwtrekkende kinderen, waarbij enkele kinderen zijdelings aan het touw beginnen te duwen en te trekken, zie fig. 2.

Zeer gebruikelijk daarentegen zijn gelijke krachten op gelijke afstanden in horizontale richting. Het koord neemt dan de vorm aan van een parabool, zie fig. 3.

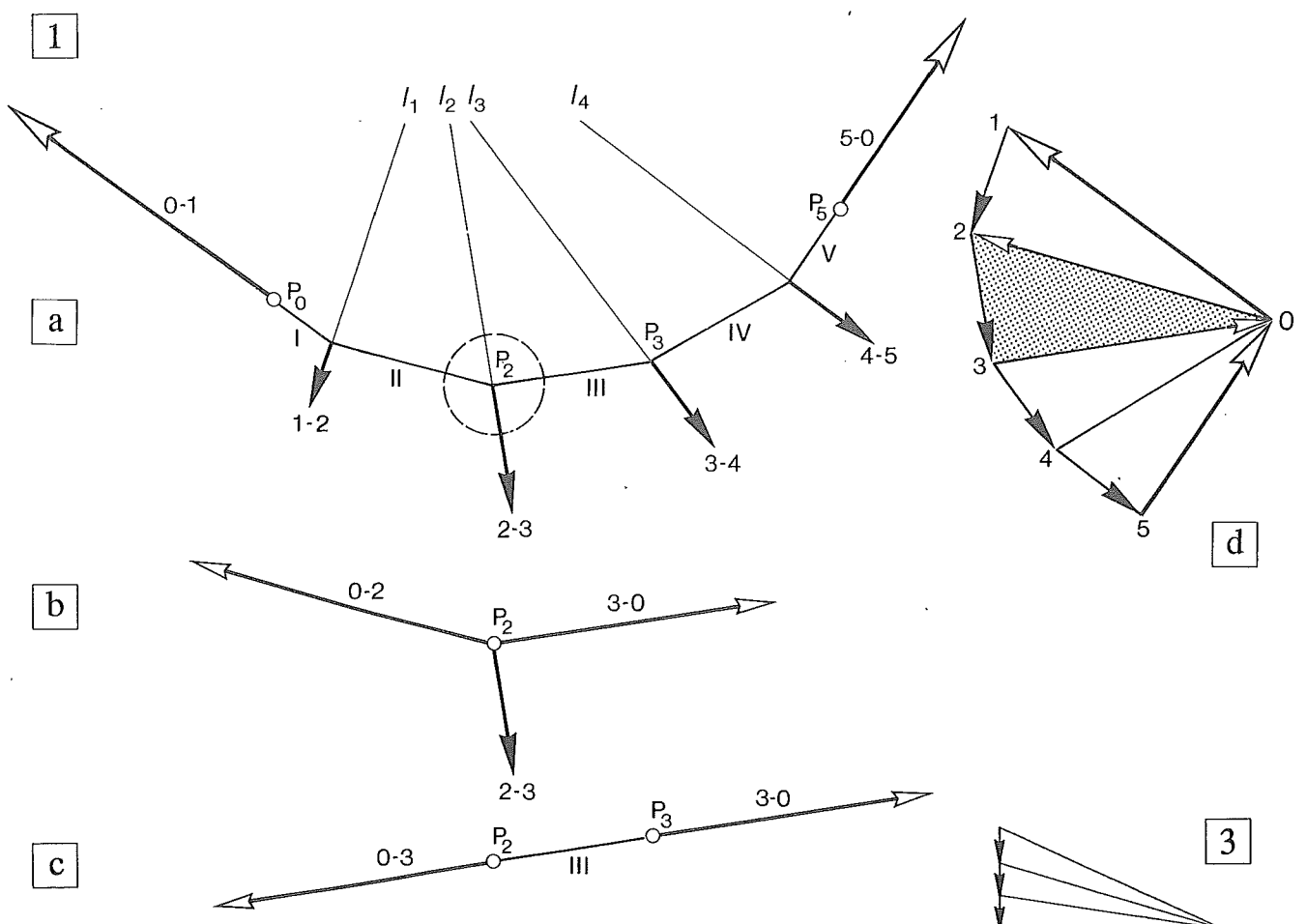


Fig. 1 Krachswerking in een koord, opgehangen in de punten  $P_0$  en  $P_5$ , onder invloed van vier uitwendige krachten (1-2; 2-3; 3-4; 4-5)

a. Vorm van het koord  
 b. Evenwicht van krachten in punt  $P_2$   
 c. Evenwicht van een deel van het koord, tussen de punten  $P_2$  en  $P_3$   
 d. Poolfiguur waarin een aantal krachten ook in richting is aangegeven

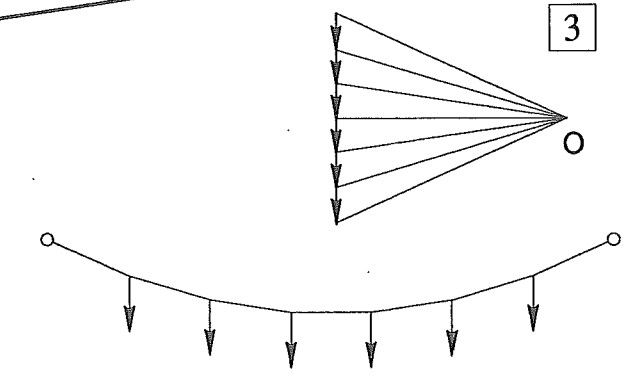


Fig. 3 Gelijke krachten op gelijke afstanden veroorzaken een parabolische vorm

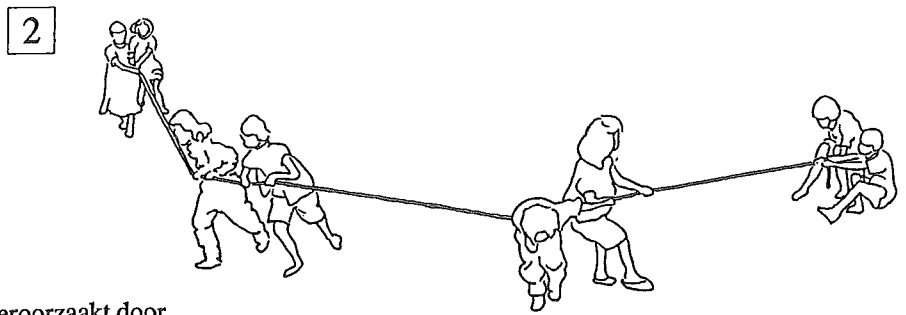


Fig. 2 Krachten op een koord veroorzaakt door spelende kinderen

