16

P DICTAAT TOEGEPASTE MECHANICA / DRAAGCONSTRUCTIES
PORTAALSPANTEN

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
AFDELING BOUWKUNDE

VAKGROEP TOEGEPASTE MECHANICA /
/ DRAAGCONSTRUCTIES

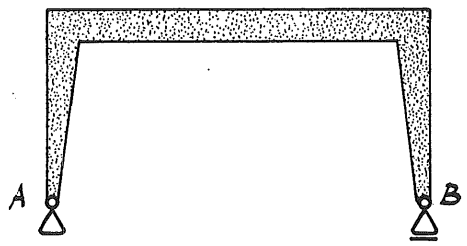
PROF.IR. D. DICKE / IR. W.A. EISMA

FEBRUARI 1978

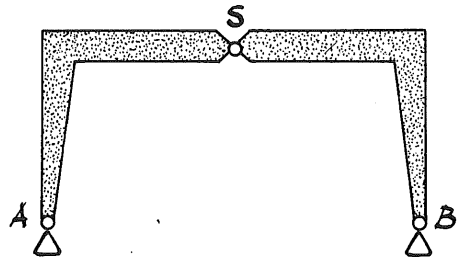
16 PORTAALSPANTEN

Een constructie samengesteld uit twee kolommen en een balk noemen we een portaal of ook wel portaalspant.
In zo'n portaal is de verbinding tussen balk en kolommen volledig in staat om momenten, dwars- en normaalkrachten over te brengen.

We gaan ons bezighouden met portaalspanten. Deze spanten kunnen zowel statisch bepaald als statisch onbepaald worden ondersteund. We beperken ons tot de statisch bepaalde spanten en zullen de krachtsverdeling in deze spanten nagaan.



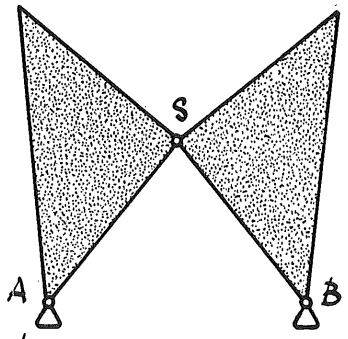
portaalspant



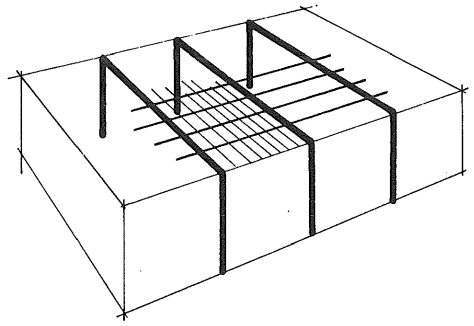
driescharnierspant

Een bijzondere vorm van een portaalspant is een driescharnierspant.
Zo'n spant is statisch onbepaald ondersteund.

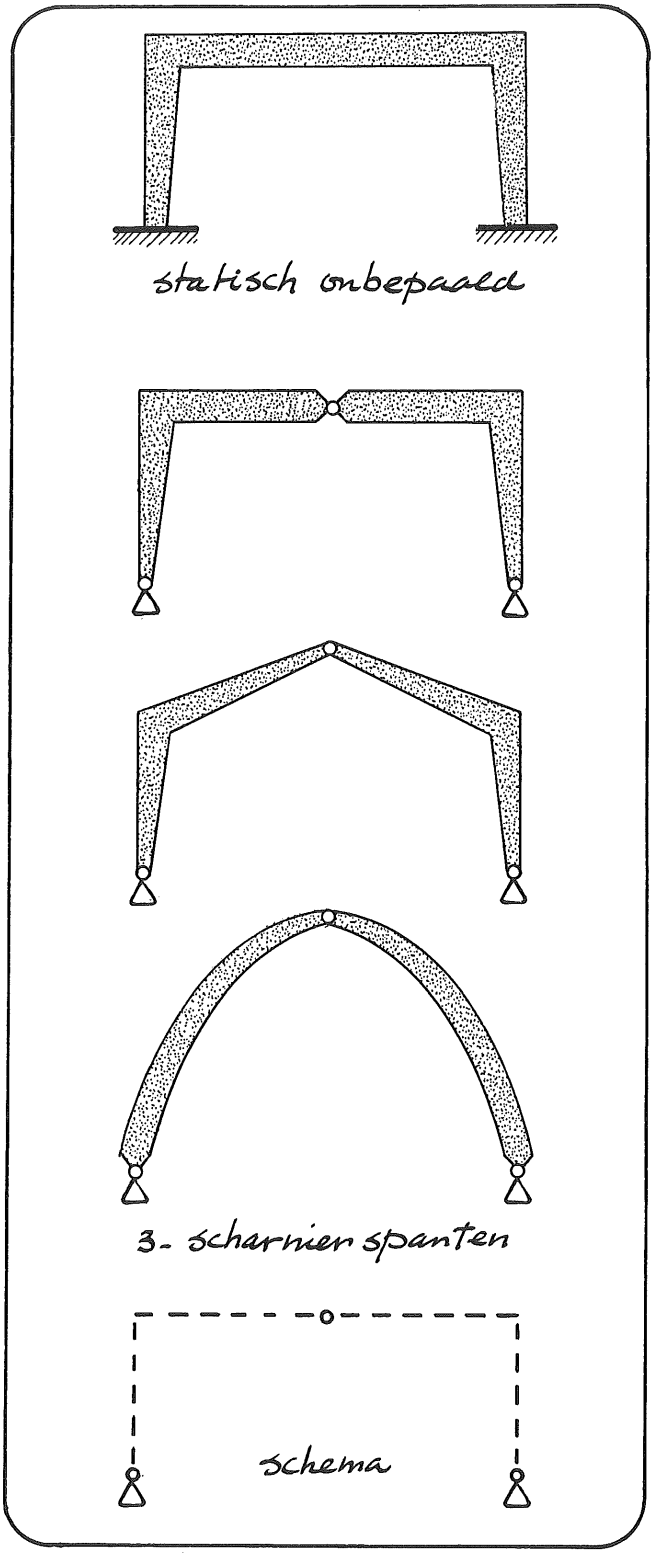
Hoe de uitwendige krachten die op een driescharnierspant werken worden afgeleid naar de aardkorst zullen we nagaan aan de hand van een blokkenconstructie.



blokkenconstructie



Portalen of portaalspanten worden veel toegepast als onderdeel van de draagconstructie van een bouwwerk, in het bijzonder wanneer het gaat om een laagbouwconstructie.



Een portaal wordt veelal ontworpen als een statisch onbepaalde constructie.

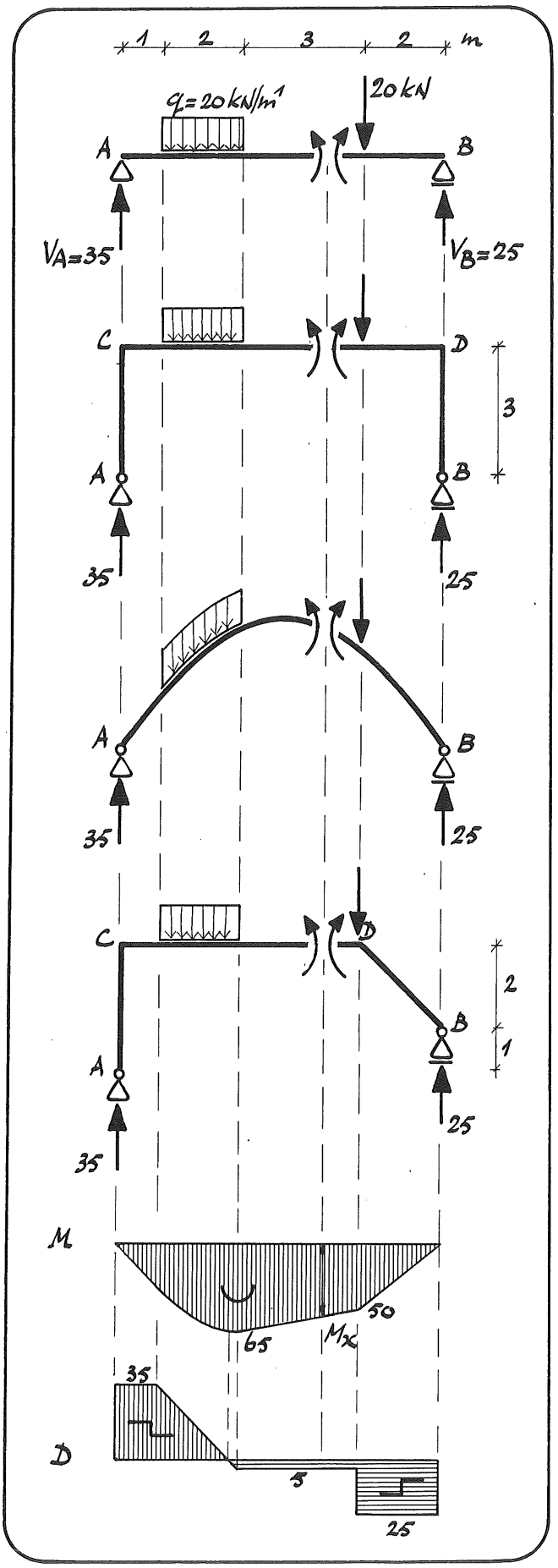
Als statisch bepaalde constructie is het driescharnierspant de meest gebruikelijke constructie. Bij deze spanten kan de balk ook een geknikte vorm hebben. Soms worden balk en kolom zelfs samengesmolten tot één gebogen vorm. We spreken in dit geval van driescharnierboogspanten.

Sporthal Amsterdam-Oost arch: M. Kamerling 1974
-gebouwd op de fundering van een gashouder-

Het schema van een portaalspant is samengesteld uit een aantal lijnen (staafassen, al of niet recht) die niet in elkaars verlengde liggen. We zullen nagaan hoe in dit geval de momenten-, dwarskrachten- en normaalkrachtenlijn kunnen worden bepaald.

Dit hoofdstuk is opgebouwd uit de volgende onderdelen:

1. evenwicht
2. driescharnierspanten
3. zelftoets
4. voorbeelden
5. vraagstukken



1. EVENWICHT

Een constructie die wordt ondersteund door een scharnier- en een roloplegging is een statisch bepaalde constructie.
In de beide steunpunten worden in totaal drie reactiekrachten opgewekt door de belasting die op de constructie aangrijpt.
De grootte van deze reactiekrachten wordt bepaald met behulp van de drie evenwichtvoorwaarden $\Sigma V = 0$, $\Sigma H = 0$ en $\Sigma M = 0$.

We gaan eens na of deze grootte afhankelijk is van de vorm van de constructie en zullen dit doen voor een belasting van de constructie door:

a. uitsluitend verticale krachten
b. verticale en horizontale krachten

a. Verticale krachten

Werken op een constructie uitsluitend verticale krachten dan is de grootte van de reactiekrachten altijd onafhankelijk van de vorm van deze constructie. Of de steunpunten wel of niet op gelijke hoogte liggen is niet van betekenis.

Voor de reactiekrachten in alle getekende constructies geldt immers bij de gegeven belasting:

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 0$

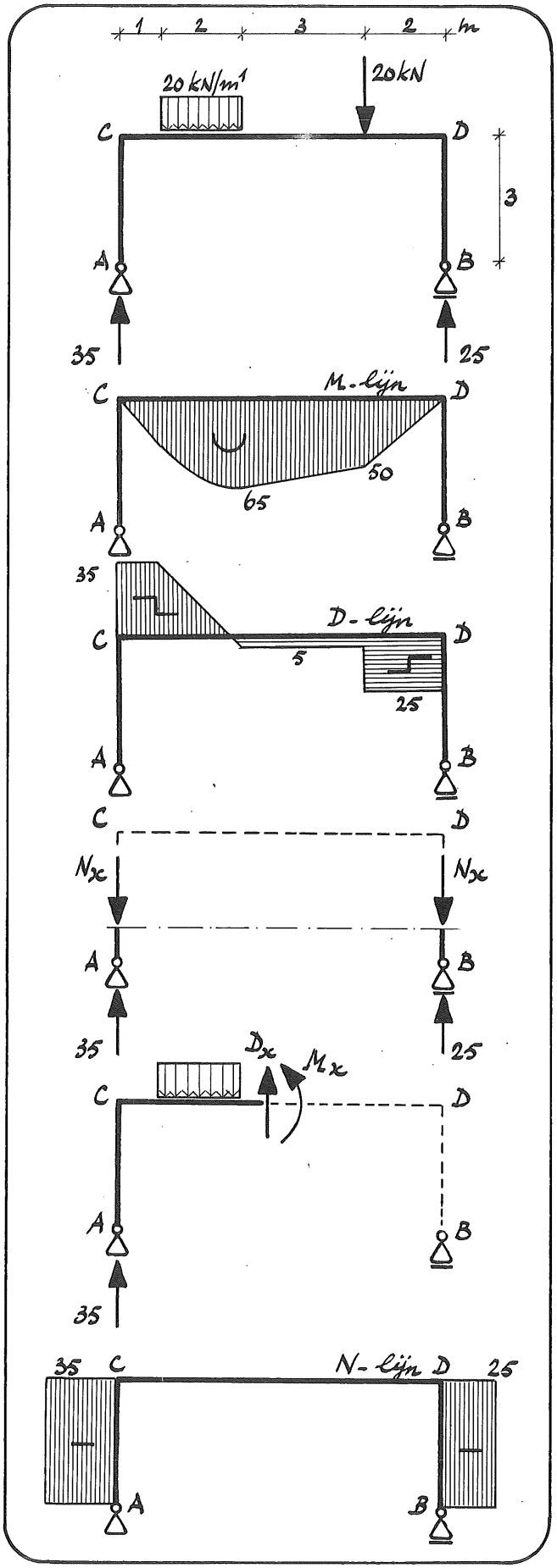
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot 8 - 2 \cdot 20 \cdot 6 - 2 \cdot 20 = 0$

$V_A = 35$ kN

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_B - 2 \cdot 20 - 20 = 0$

$V_B = 25$ kN

Met behulp van de berekende waarden voor de reactiekrachten kunnen de M- en D-lijn worden bepaald en getekend.
De M-lijn geldt voor alle constructies. In overeenkomstige doorsneden is dus de grootte van het buigend moment M_x gelijk.



We bekijken de constructie met de stijlen AC en BD van gelijke lengte eens wat nader.

Voor zo'n constructie tekenen we vaak de gevonden M-lijn in het schema van de constructie. We kunnen dit doen door de nullijn van het M-vlak te laten samenvallen met de regel CD.
We kunnen ook de gevonden D-lijn in het schema tekenen. Zoals later zal blijken kan dit niet altijd zonder meer.

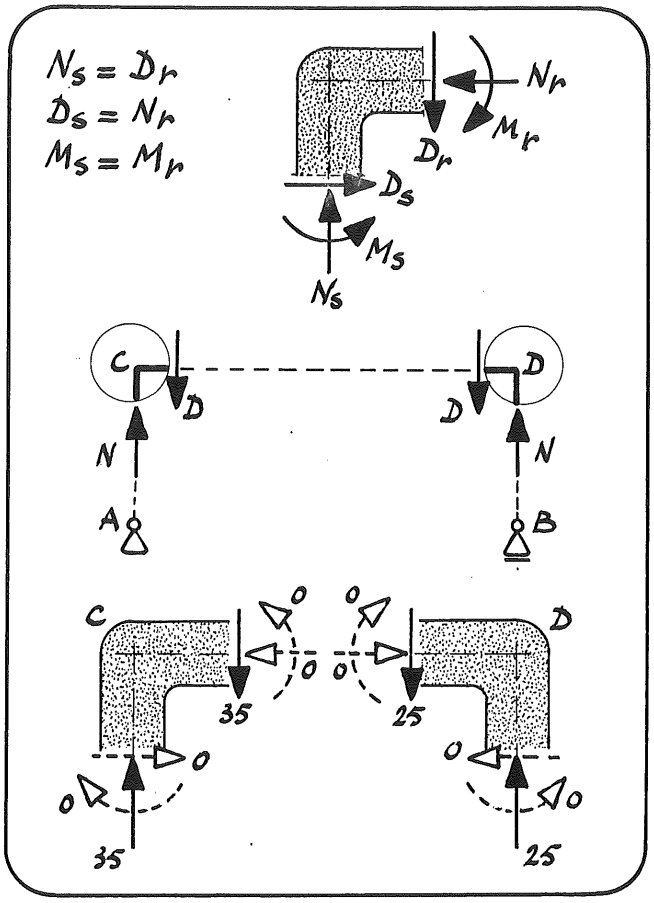
In de figuren zijn voor de stijlen AC en BD geen M- en D-lijn getekend omdat in deze stijlen geen buigende momenten en dwarskrachten optreden. We kunnen dit als volgt verklaren.

Brengen we een horizontale snede aan over de verticale <u>stijlen</u> AC en BD dan volgt uit het evenwicht van de stijldelen die onder deze snede liggen dat in de sneden <u>alleen</u> de <u>normaalkrachten</u> N_x kunnen werken.

Brengen we een verticale snede aan over de horizontale <u>regel</u> CD dan volgt uit het evenwicht van het constructiedeel links (of rechts) van deze snede dat in de snede <u>alleen</u> een buigend <u>moment</u> M_x en een <u>dwarskracht</u> D_x kunnen werken.

Voor stijl AC geldt: $N_x = V_A = 35$ kN (druk)
Voor stijl BD geldt: $N_x = V_B = 25$ kN (druk)

Met deze gegevens kunnen we voor de constructie ook de N-lijn tekenen.



Beschouwen we het evenwicht van een afgesneden deel rondom een hoekpunt van de constructie dan zien we dat:

- de normaalkracht in de stijl (N_s) even groot moet zijn als de dwarskracht in de regel (D_r)
- de dwarskracht in de stijl (D_s) even groot moet zijn als de normaalkracht in de regel (N_r)
- het moment in de stijl (M_s) even groot moet zijn als het moment in de regel (M_r)

Dit geldt altijd als stijl en regel loodrecht op elkaar staan en bovendien in het hoekpunt geen uitwendige krachten aangrijpen.

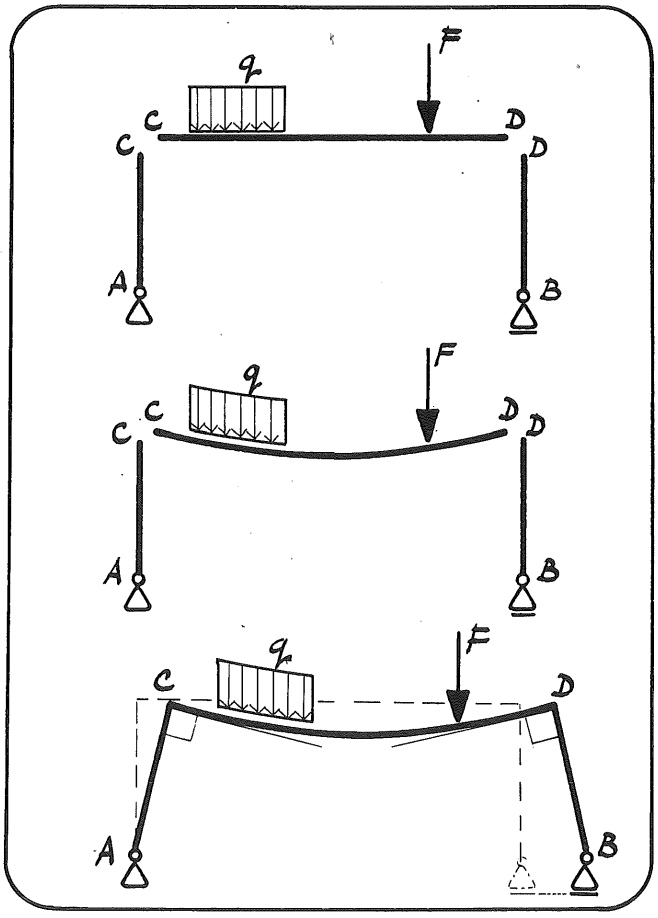
Voor hoekpunt C geldt:

$N_s = D_r = 35$ kN; $N_r = D_s = 0$; $M_s = M_r = 0$

Voor hoekpunt D:

$N_s = D_r = 25$ kN; $N_r = D_s = 0$; $M_s = M_r = 0$

Dit is in overeenstemming met de getekende M-, D- en N-lijn.



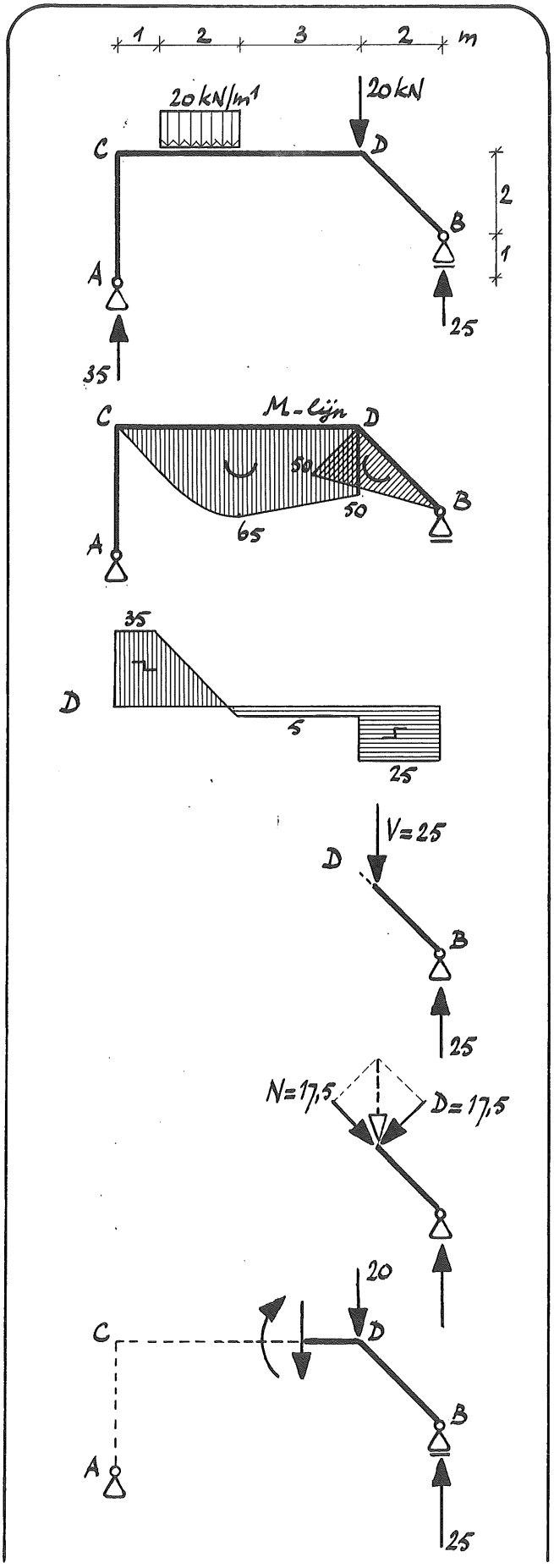
We trachten tenslotte nog de elastische lijn te tekenen en snijden daartoe de constructie in de hoekpunten C en D door.

Bekijken we de constructiedelen AC, CD en BD afzonderlijk, dan kunnen we stellen dat:

- de delen AC en BD niet vervormen omdat in deze delen geen buigende momenten optreden (de vervorming door normaalkrachten is zeer klein en wordt verwaarloosd)
- deel CD vervormt tengevolge van de belasting die er op aangrijpt

De constructiedelen zullen in de hoekpunten C en D loodrecht op elkaar moeten blijven staan. Dit heeft tot gevolg dat regel CD zich horitontaal naar rechts zal moeten verplaatsen. Daarbij verplaatst ook de roloplegging in steunpunt B naar rechts.

In de figuur is de elastische lijn getekend. Uit deze elastische lijn wordt wel duidelijk dat de beschouwde constructie in een bouwwerk slecht bruikbaar zal zijn.



We bekijken nog de constructie met de verticale stijl AC en de schuin gerichte stijl BD.

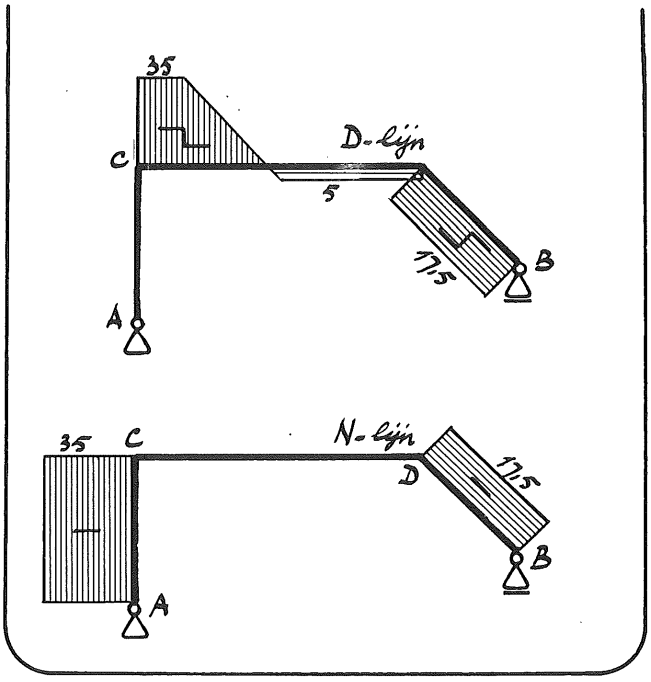
Zetten we de M-lijn uit in het schema van de constructie dan moeten we er rekening mee houden dat de nullijn van het M-vlak in punt D een knik krijgt.

Met het uitzetten van de al eerder gevonden D-lijn in het schema moeten we voor wat betreft de stijl BD voorzichtig zijn.

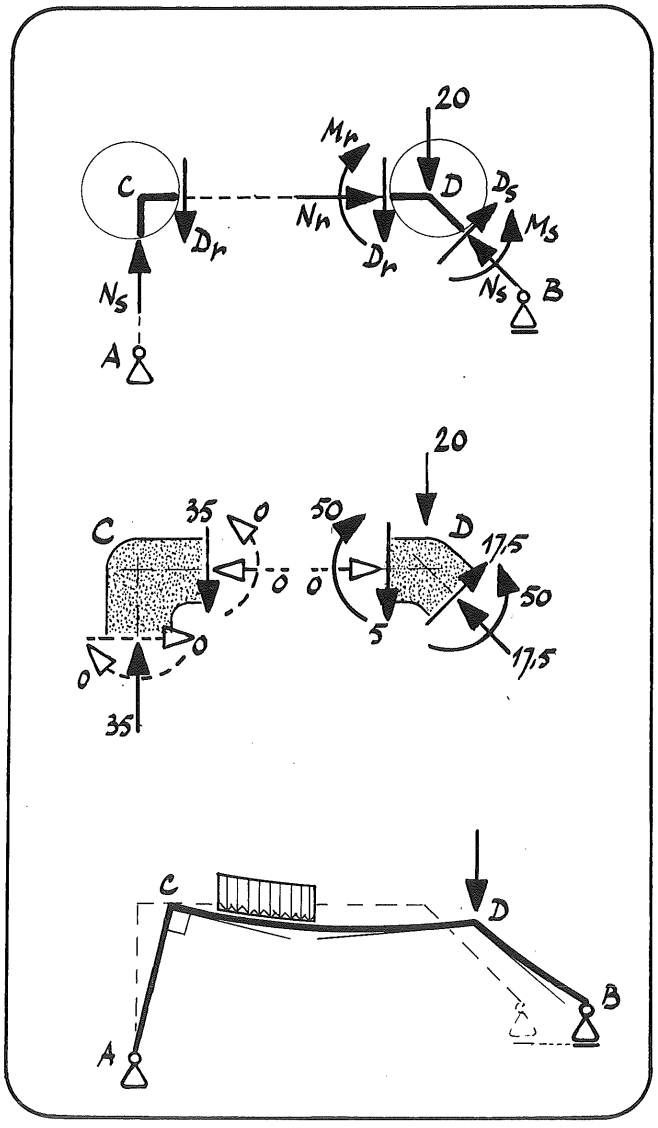
We brengen een snede aan in de stijl BD en beschouwen het evenwicht van het deel rechts van deze snede. Hieruit volgt dat in deze snede een verticaal omlaag gerichte kracht V = 25 kN werkt. De kracht V is echter niet de dwarskracht in de snede, een dwarskracht werkt immers <u>dwars</u> op de staafas.
We ontbinden daarom kracht V in een component D loodrecht op de staafas en een component N in de richting van de staafas. De grootte van beide componenten is
$25 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \simeq 17{,}5$ kN.

Component D = 17,5 kN is niets anders dan de dwarskracht in een willekeurige doorsnede van stijl BD.
Component N = 17,5 kN is dan de normaalkracht.

Brengen we nog een snede aan over regel CD dan volgt uit het evenwicht van het deel rechts van deze snede dat in de snede geen normaalkracht werkt.



We hebben nu voldoende gegevens om de D- en N-lijn in het schema van de constructie te kunnen tekenen.



We beschouwen nog het evenwicht van een afgesneden deel rondom de hoekpunten C en D.

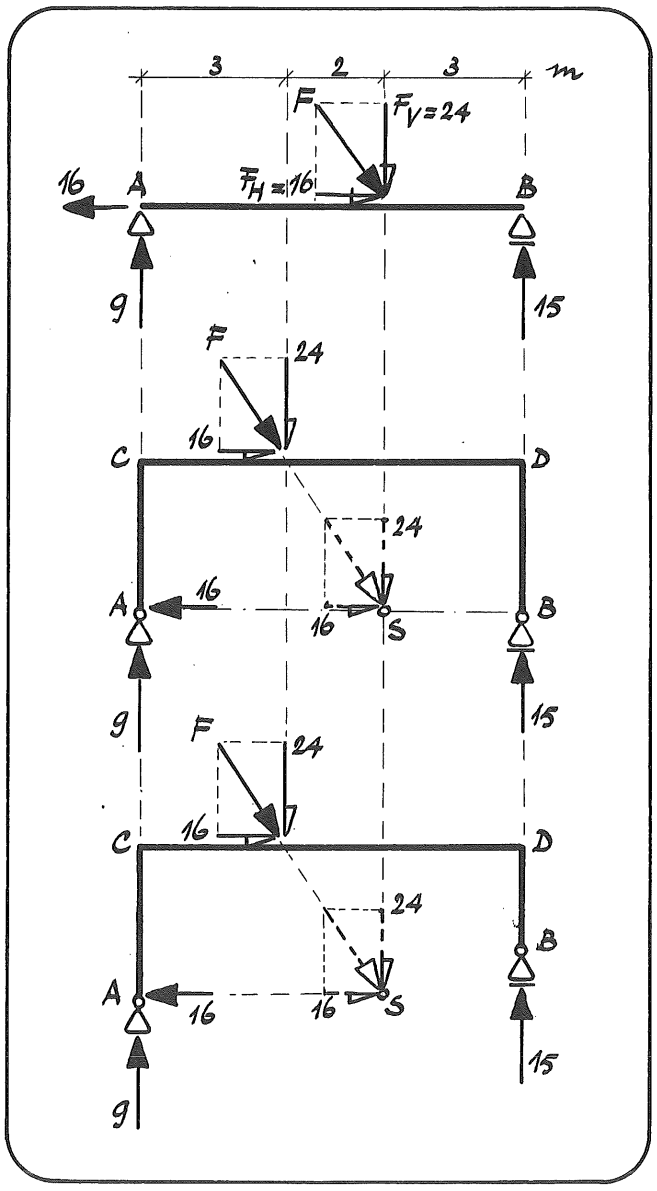
Voor hoekpunt C geldt weer dat de normaalkracht N_s in stijl AC even groot is als de dwarskracht D_r in regel CD.
Stijl en regel staan immers loodrecht op elkaar en er is geen uitwendige belasting in C.

In hoekpunt D grijpt een uitwendige kracht aan. Dit betekent dat de gevonden regel (normaalkracht stijl = dwarksracht regel) zonder meer niet opgaat. Bovendien staan in dit hoekpunt stijl en regel niet loodrecht op elkaar.
Wel geldt dat M_s gelijk is aan M_r. We hebben dit al gebruikt bij het tekenen van het M-vlak door de nullijn van dit vlak bij D een knik te geven.

Volledigheidshalve geven we nog een schets van de elastische lijn. Deze lijn is moeilijker te bepalen dan die van het vorige geval omdat hoekpunt D niet alleen horizontaal maar ook verticaal zal verplaatsen. We gaan hier verder niet op in.

b. Verticale en horizontale krachten

Werken op een constructie zowel verticale als horizontale krachten dan is de grootte van de reactiekrachten niet altijd onafhankelijk van de vorm van de constructie. Of de steunpunten wel of niet op gelijke hoogte liggen kan nu van invloed zijn op de grootte van deze reactiekrachten.



We beschouwen eens drie verschillende constructies die alle worden belast door dezelfde, schuin gerichte kracht F. De werklijn van deze kracht heeft in alle gevallen dezelfde afstand tot het steunpunt A. Verder is nog gegeven dat F_H = 16 kN en F_V = 24 kN.

We verplaatsen kracht F langs zijn werklijn naar punt S op de horizontaal door het scharnier in A. Het is dan niet moeilijk meer om in te zien dat voor alle constructies voor de reactiekrachten geldt:

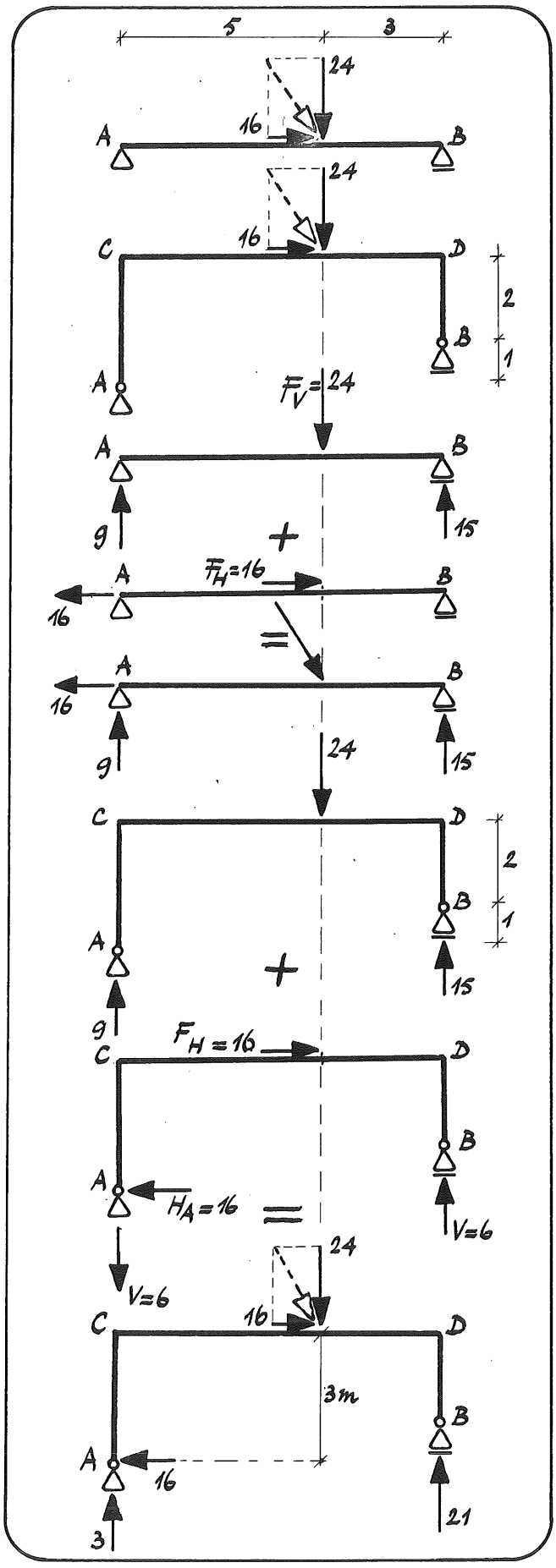
$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 16$ kN

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot 8 + 24 \cdot 5 = 0$

$V_B = 15$ kN

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_B - 24 = 0$

$V_A = 9$ kN



Uit het voorgaande volgt direct dat voor de hier getekende belastinggevallen de reactiekrachten in de steunpunten van ligger AB en constructie ACDB niet gelijk kunnen zijn. Dit is ook zonder het voorgaande eenvoudig te verklaren.

Door de verticale kracht F_V = 24 kN worden in <u>ligger</u> AB verticale reactiekrachten opgewekt:

$V_A = \frac{3}{8} \cdot 24 = 9$ kN; $V_B = \frac{5}{8} \cdot 24 = 15$ kN.

Door de horizontale kracht F_H = 16 kN ontstaat de reactiekracht H_A = 16 kN. De krachten F_H en H_A hebben dezelfde werklijnen; deze krachten zijn dus in evenwicht met elkaar. Superponeren we beide belastinggevallen dan vinden we dus:

H_A = 16 kN; V_A = 9 kN; V_B = 15 kN.

Door de verticale reactiekracht F_V = 24 kN worden in <u>constructie</u> ACDB dezelfde reactiekrachten opgewekt als in de ligger AB:

V_A = 9 kN; V_B = 15 kN.

Door de horizontale kracht F_H = 16 kN ontstaat in steunpunt A de horizontale reactiekracht H_A = 16 kN.
De krachten F_H en H_A hebben nu echter niet dezelfde werklijn. Daardoor vormen deze krachten een koppel met een moment

$M = F_H \cdot 3 = H_A \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48$ kNm.

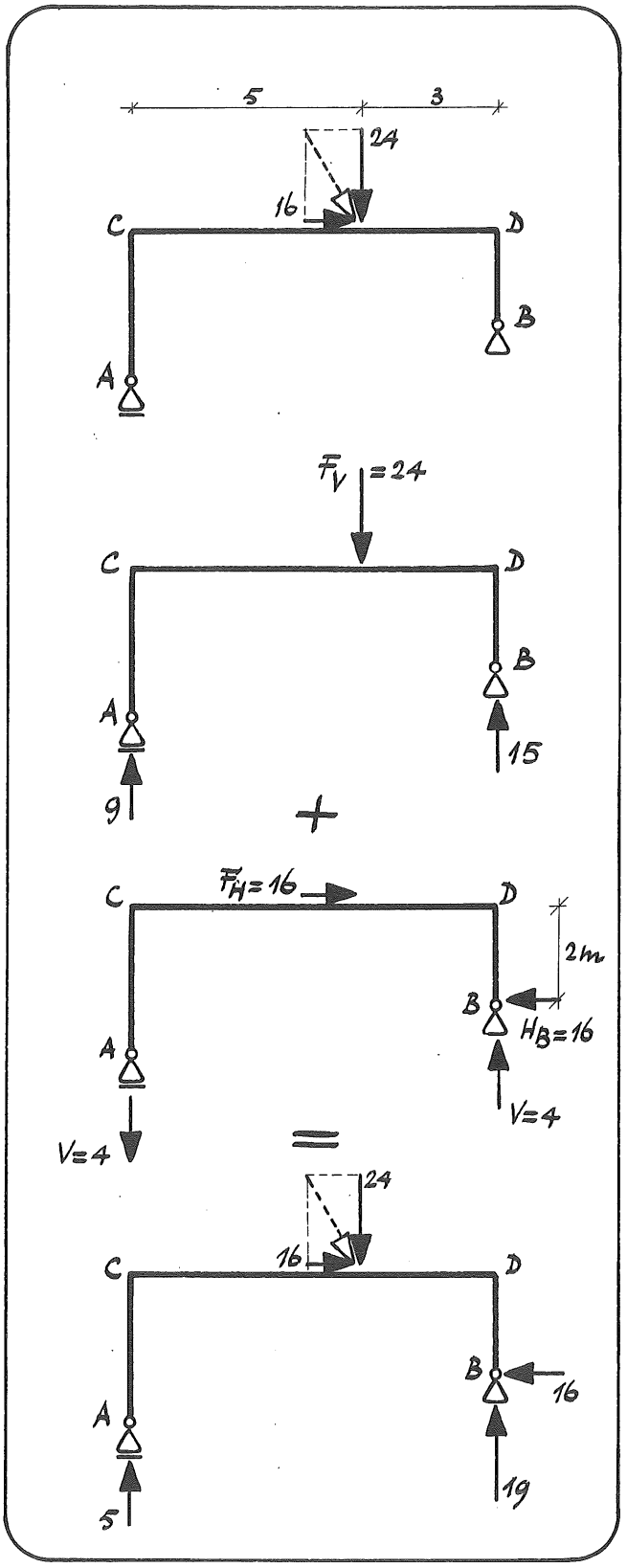
Dit moment moet worden tegengewerkt door een koppel gevormd door verticale krachten V in A en B. We vinden voor de grootte van V:

$V \cdot 8 = 48 \rightarrow V = 6$ kN.

De totale reactiekrachten vinden we door superpositie:

H_A = 16 kN; $V_A = 9 - 6 = 3$ kN;

$V_B = 15 + 6 = 21$ kN.



Verwisselen we in constructie ACDB de beide opleggingen - dus het scharnier van A naar B en de rol van B naar A - dan zal daardoor de grootte van de reactiekrachten veranderen. We kunnen dit als volgt verklaren.

Kracht F_V verdeelt zich over de steunpunten in A en B ongeacht de plaats van de rol en het scharnier.
Dus: V_A = 9 kN; V_B = 15 kN.

Verder is: $H_B = F_H$ = 16 kN.
Door de krachten F_H en H_B wordt een koppel gevormd. Het moment van dit koppel is:

$M = F_H \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$ kNm

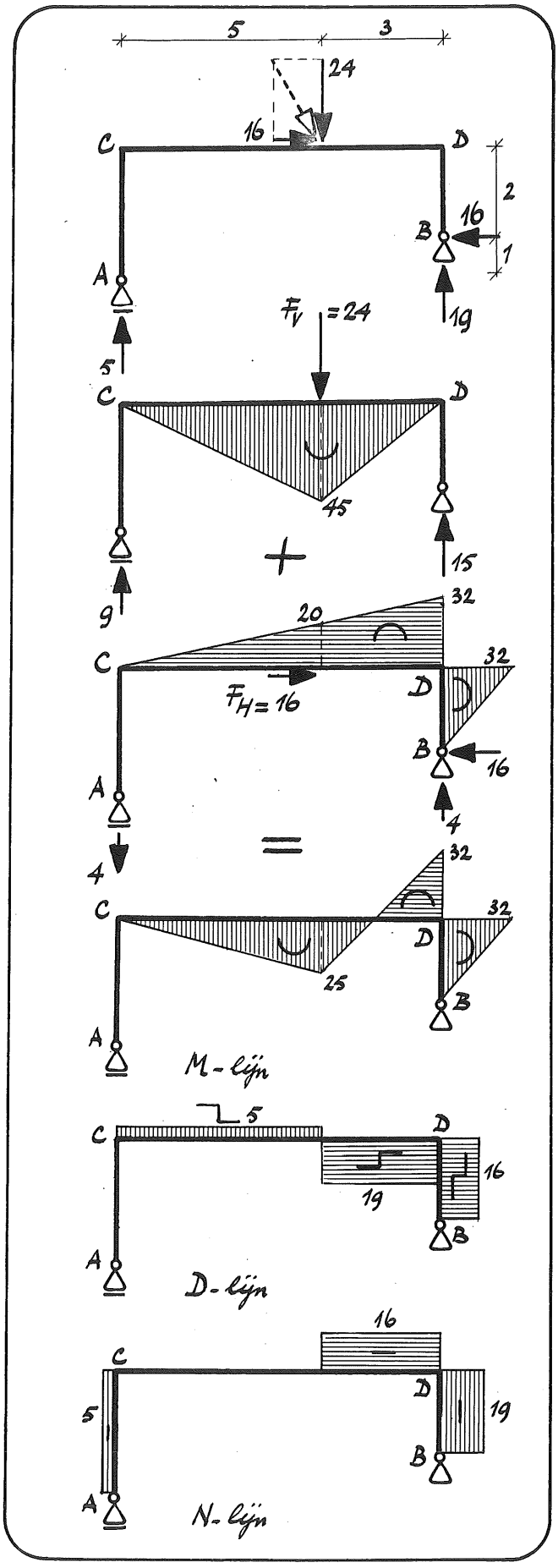
Door dit moment worden in de steunpunten A en B weer verticale reactiekrachten V opgewekt. De grootte van deze krachten volgt nu uit:

$V \cdot 8 = 32 \rightarrow V = 4$ kN.

De totale reactiekrachten worden daardoor:

$V_A = 9 - 4 = 5$ kN; $V_B = 15 + 4 = 19$ kN;

H_B = 16 kN.



We bepalen voor constructie ACDB met ook rol in A en een scharnier in B nog de M-, D- en N-lijn.

We bepalen deze lijnen door superpositie. De M-lijn tengevolge van kracht F_V = 24 kN komt overeen met die van een ligger AB op twee steunpunten en is dus snel te bepalen.

De M-lijn voor stijl BD tengevolge van kracht F_H = 16 kN wordt bepaald door de reactiekracht H_B = 16 kN.
We vinden:

$M_D = H_B \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$ kNm.

De M-lijn voor regel CD wordt bepaald door de krachten H_B en V_B = 4 kN.
We kunnen deze M-lijn echter sneller vinden door uit te gaan van steunpunt A waarin alleen kracht V_A = 4 kN werkt.
We vinden dan:

$M_C = 0$ en $M_D = V_A \cdot 8 = 4 \cdot 8 = 32$ kNm.

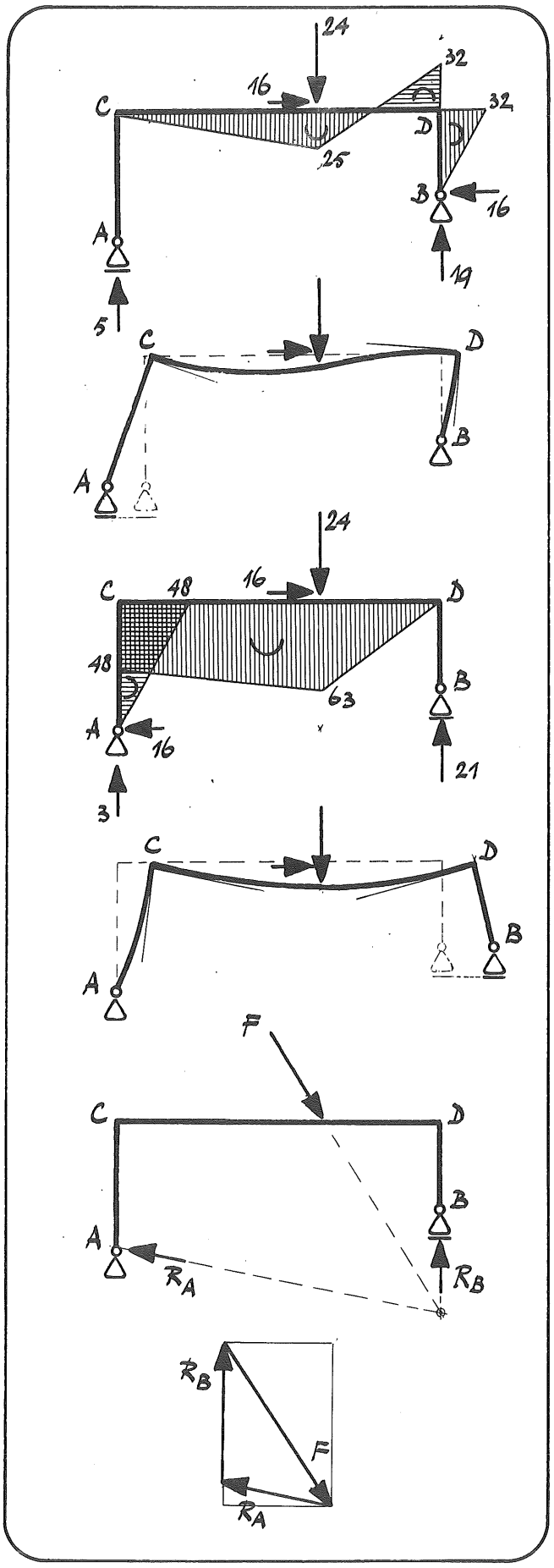
Door superpositie vinden we de totale M-lijn.

De D- en N-lijn kunnen we nu bepalen uit de grootte van de reactiekrachten in de steunpunten.
Voor de D-lijn geldt voor:

stijl AC:	$D = H_A$	= 0
stijl BD:	$D = H_B$	= 16 kN
regel CD:	$D = V_A$	= 5 kN
en:	$D = V_B$	= 19 kN

Voor de N-lijn geldt voor:

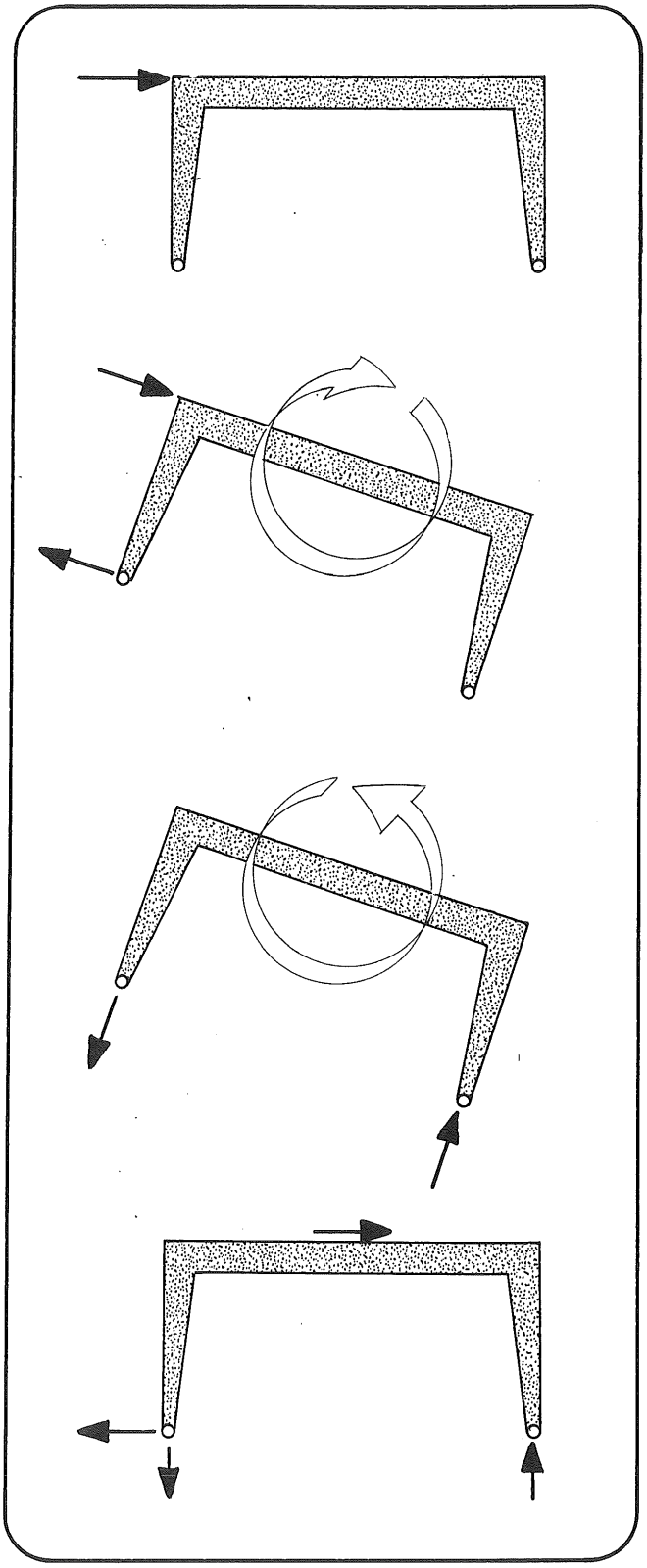
stijl AC:	$N = V_A$	= 5 kN (druk)
stijl BD:	$N = V_B$	= 19 kN (druk)
	$N = H_A$	= 0 en
regel CD:	$N = H_B$	= 16 kN



Door het verwisselen van de opleggingen verandert ook de elastische lijn.
In de constructie met een roloplegging in A zal stijl AC niet vervormen, omdat in deze stijl geen buigende momenten optreden.
Wil in het hoekpunt C een rechte hoek gehandhaafd blijven dan zal regel CD horizontaal naar rechts moeten verplaatsen.
De rol daarentegen verplaatst naar links.

In de constructie met een roloplegging in B zal stijl BD niet vervormen.
Ook nu zal regel CD naar rechts moeten verplaatsen. Ook de rol zal nu naar rechts verplaatsen.
(De getekende M-lijn wordt verder niet afgeleid; ga deze zelf eens na).

<u>Opmerking</u>
Op de beschouwde constructie werken drie krachten, F, R_B en R_A (totale oplegreactie in A). Indien deze krachten evenwicht maken zullen hun werklijnen door één punt moeten gaan.
Dit betekent dat we de grootte van de oplegreacties ook kunnen bepalen met behulp van een gesloten krachtendriehoek.

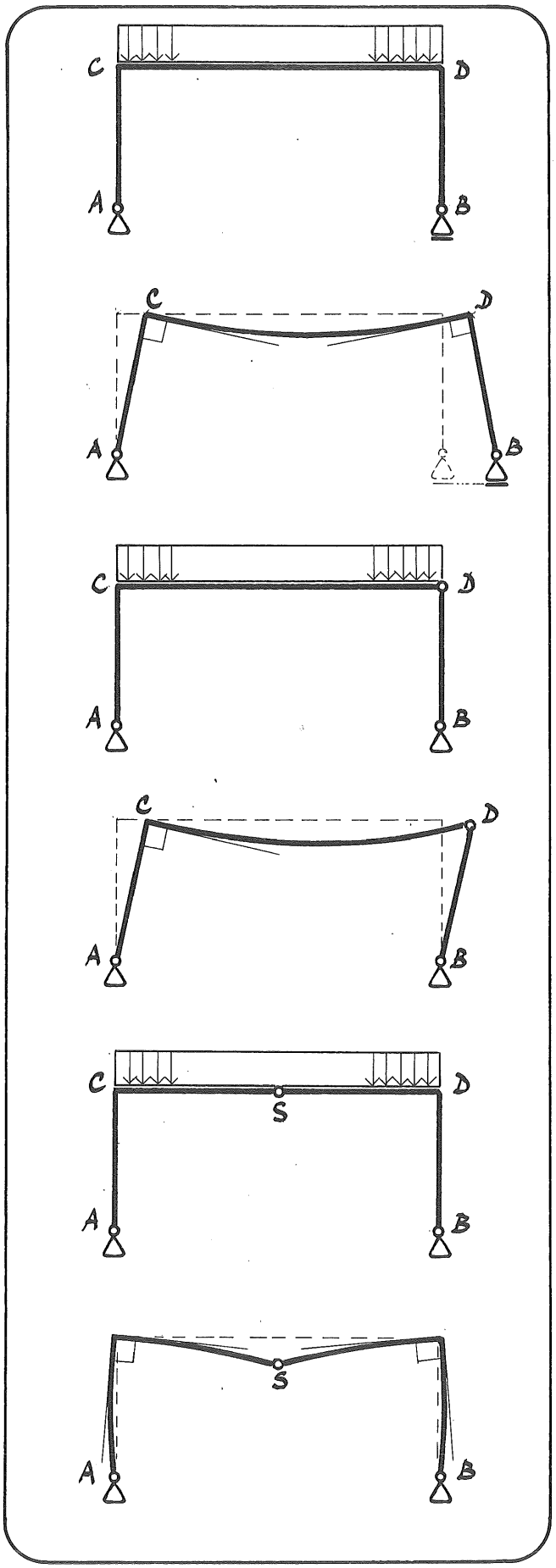


We zijn met de gegeven evenwichtsbeschouwingen nogmaals uitvoerig ingegaan op de bepaling van de grootte van de reactiekrachten in de steunpunten van een constructie.

We kunnen deze grootte natuurlijk altijd bepalen met behulp van de evenwichtsvoorwaarden. We krijgen dan drie vergelijkingen met drie onbekenden.
Deze methode is een veilige methode die echter vaak veel rekenwerk en -tijd kost. Bovendien verschaft deze methode weinig inzicht in het krachtenspel in de constructie.

We hebben in het voorgaande getracht de grootte van de reactiekrachten min of meer spelenderwijs te bepalen. We hebben met andere woorden getracht het hoe en waarom van dit krachtenspel na te gaan. Het is noodzakelijk om dit te weten als we bij het ontwerpen een gemotiveerde keuze willen doen voor de vorm van de draagconstructie.

Het is bij deze keuze van belang om de invloed te kennen van zowel verticale als horizontale belastingen op de krachtsverdeling in en de vervorming van de draagconstructie. Deze invloed kan bovendien verschillend zijn voor constructies met steunpunten op gelijke of op niet gelijke hoogte.



We geven tot slot nog een voorbeeld van de invloed die de vorm van de constructie kan hebben op de vervormingen daarvan.

We beschouwen eerst een constructie die al eerder ter sprake is geweest.
Wordt de regel belast door een gelijkmatig verdeelde belasting dan zal het portaalspant vervormen als getekend.
Door het verplaatsen van de rol bij B is deze constructievorm niet goed bruikbaar in bouwwerken.

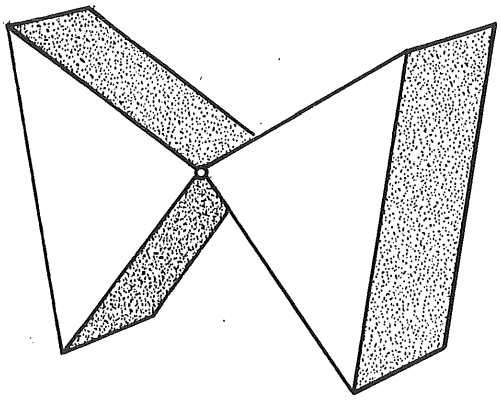
Vervangen we de rol bij B door scharnieren bij B en D dan ontstaat een portaalspant met een pendelstijl. In het evenwichtssysteem verandert er niets vergeleken bij de vorige constructie omdat een pendelstijl immers is te beschouwen als een roloplegging.

We vinden echter wel een andere elastische lijn omdat steunpunt B nu niet meer kan wegrollen. Bovendien moeten stijl en regel nu alleen in hoekpunt C loodrecht op elkaar blijven staan.

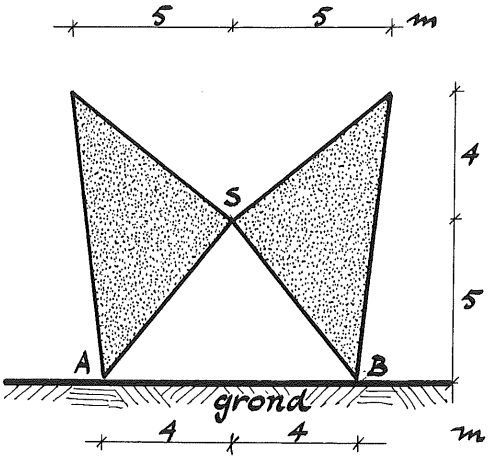
Verplaatsen we het scharnier bij D naar een ander punt van de regel, b.v. het midden S, dan ontstaat een constructie die we <u>driescharnierspant</u> noemen.

We zullen ons gaan bezighouden met driescharnierspanten en nagaan hoe de krachtsverdeling in deze spanten kan worden bepaald. Dan kunnen we ook vaststellen dat de elastische lijn de getekende vorm zal moeten hebben.

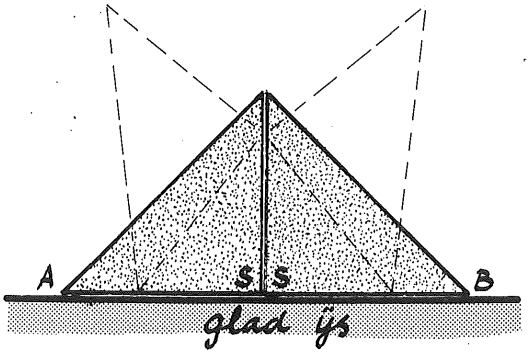
2. DRIESCHARNIERSPANTEN



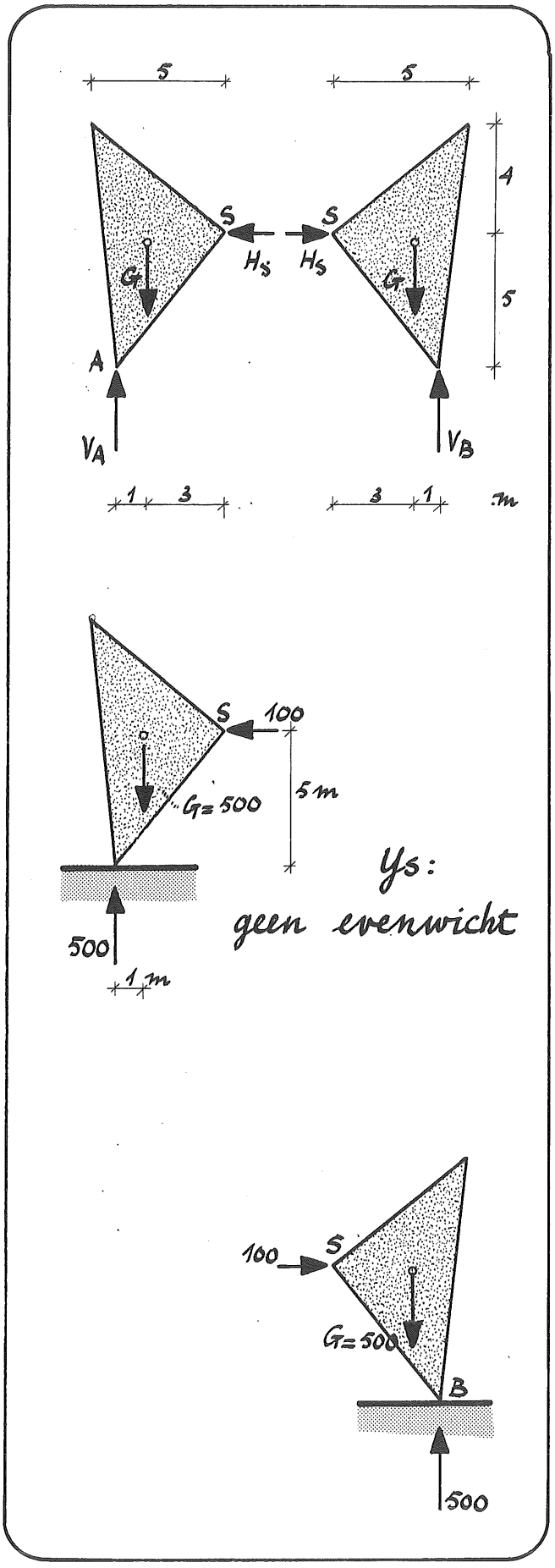
Een bijzondere vorm van een portaalspant is een driescharnierspant. Zo'n spant heeft een eenvoudig evenwichtssysteem. We kunnen dit aantonen door eens twee prismatische blokken te nemen, van gelijke vorm en van beton of van hout (van de blokkendoos uit onze jeugd).



Plaatsen we deze blokken tegen elkaar op de grond dan zien we dat ze overeind blijven staan. We hebben een soort constructie gekregen.



Plaatsen we de blokken echter tegen elkaar op zuiver glad (wrijvingsloos) ijs dan zien we dat de "constructie" in elkaar valt. Om na te kunnen gaan waarom dit gebeurt beschouwen we het evenwicht van de beide blokken afzonderlijk.



Op elk blok werken de volgende krachten:

- het eigen gewicht
  Stel dat het blok van beton is en een dikte heeft van 1 m, dan is dit gewicht ongeveer G = 500 kN
- een verticale kracht V_A of V_B in het steunpunt A of B
  (het gladde ijs kan geen horizontale wrijvingskracht leveren)
- een horizontale kracht H_S in het punt S waar de blokken tegen elkaar steunen

In punt S zal in het algemeen ook een verticale kracht V_S werken. Deze moet in dit geval - vanwege de symmetrie - gelijk zijn aan nul, zoals later zal worden aangetoond.

We beschouwen het evenwicht van het linker blok.
Uit $\Sigma V = 0$ volgt dat: $V_A = G = 500$ kN.

De werklijnen van de krachten V_A en G vallen niet samen. Deze krachten vormen dus samen een koppel met een moment

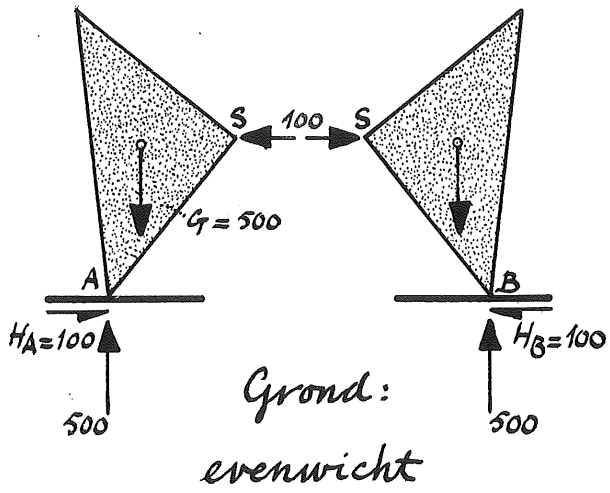
$M = V_A \cdot 1 = G \cdot 1 = 500 \cdot 1 = 500$ kNm.

Dit moment kan worden tegengewerkt door kracht H_S. De grootte van H_S moet dan zijn:

$H_S = M : 5 = 500 : 5 = 100$ kN.

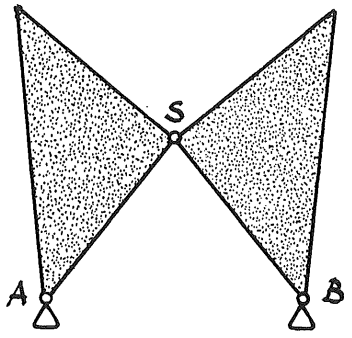
Kracht H_S verhindert dus dat het blok gaat draaien. Er is nu echter geen horizontaal evenwicht mogelijk ($\Sigma H \neq 0$), het blok staat immers op glad ijs. Het steunpunt A zal gaan weg"rollen".

Beschouwen we het evenwicht van het rechterblok dan geldt om dezelfde reden ook voor dit blok dat $\Sigma H = 0$. Dit betekent dat ook steunpunt B zal gaan wegrollen.
De blokkenconstructie valt dus op glad ijs in elkaar.



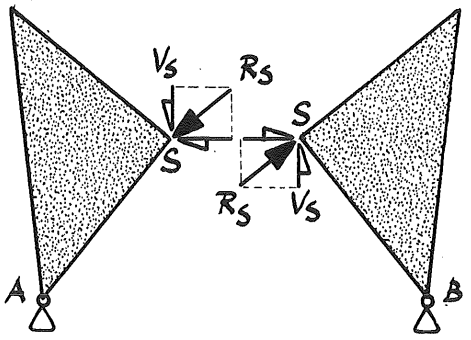
Worden de blokken op de grond geplaatst en nemen we aan dat deze grond in staat is voldoende wrijving in de steunpunten te leveren, dan blijft de blokkenconstructie overeind staan.
In A en B ontstaan dan de horizontale reactiekrachten H_A en H_B, waarvoor geldt:

$H_A = H_B = H_S = 100$ kN.

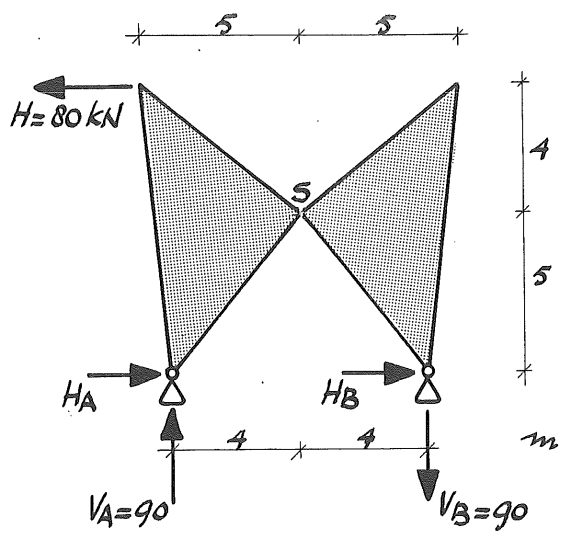


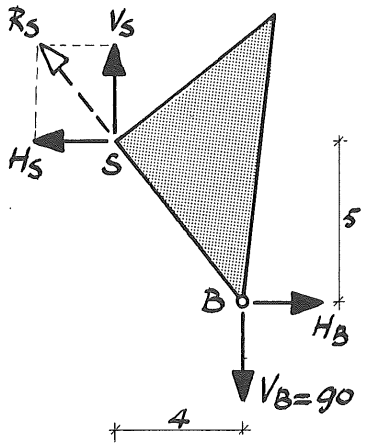
We zien dus dat in de steunpunten van een goede blokkenconstructie zowel een verticale als een horizontale reactiekracht moet kunnen werken.
Dit betekent dat we in het mechanicaschema van de constructie bij A en B scharnieren moeten aanbrengen.

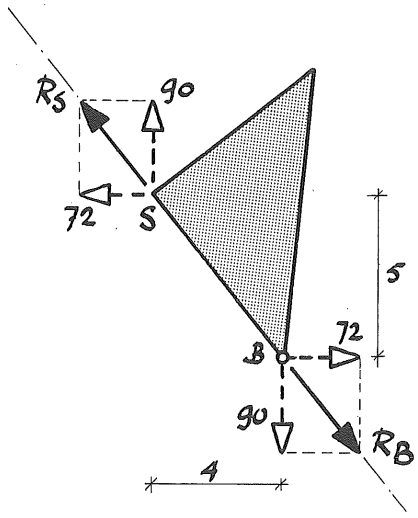
Ook in S brengen we een scharnier aan, ook al is dat voor dit belastinggeval (symmetrie) niet strikt noodzakelijk. We kunnen dit als volgt verklaren.



De blokken zijn gelijk van vorm. We hebben dus een symmetrische constructie. Ook de belasting - door het eigen gewicht van de blokken - is symmetrisch.
Wegens deze symmetrie is het ondenkbaar dat in punt S een schuin gerichte kracht R_S zal kunnen werken. In dat geval zal immers op het linker blok de verticale component V_S van deze kracht naar beneden werken en op het rechter blok naar boven. De blokken worden dan niet meer symmetrisch belast.
Vanwege de symmetrie - van constructie èn belasting - moet dus kracht R_S een horizontale werklijn hebben.







Laten we op de blokkenconstructie een horizontale kracht H = 80 kN aangrijpen dan zal er in punt S wel een schuin gerichte kracht optreden. We gaan dit eens na. We tekenen in het schema van de constructie nu in A en B scharnieren en laten het gewicht van de blokken buiten beschouwing.

Uit het evenwicht van de totale constructie volgt:

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -80 \cdot 9 + V_A \cdot 8 = 0 \rightarrow V_A = 90$ kN

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A - V_B = 0 \rightarrow V_B = 90$ kN

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A + H_B - 80 = 0$

Om de grootte van de krachten H_A en H_B te kunnen bepalen beschouwen we het evenwicht van beide blokken afzonderlijk.

Omdat op het rechterblok geen uitwendige kracht aangrijpt beschouwen we eerst het evenwicht daarvan. Op dit blok werken de krachten V_B, H_B en R_S (componenten H_S en V_S).

Uit $\Sigma V = 0$ volgt: $V_S = V_B = 90$ kN.

De krachten V_B en V_S vormen samen een koppel met een moment $M = 90 \cdot 4 = 360$ kNm.

Dit moment wordt tegengewerkt door het koppel gevormd door de krachten H_S en H_B.

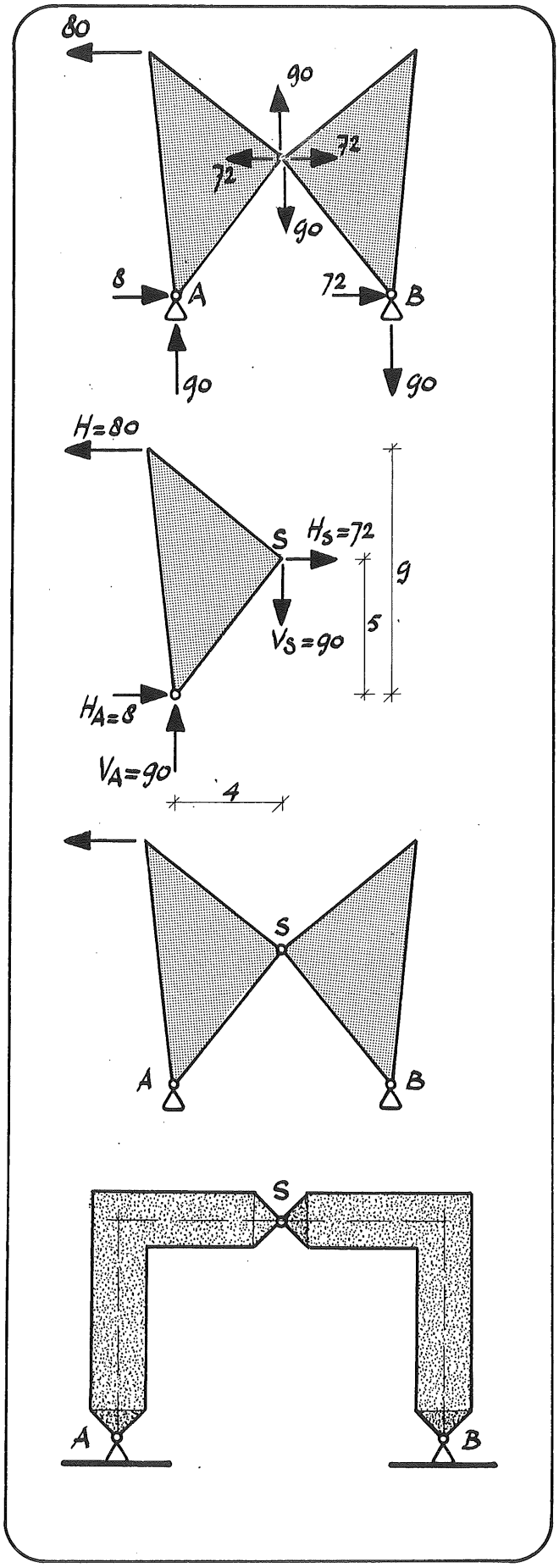
Dan is: $H_B = H_S = 360 : 5 = 72$ kN.

We hadden de grootte van H_B en H_S ook anders kunnen bepalen. Omdat op het blok geen uitwendige kracht aangrijpt werken er slechts twee krachten op dit blok, te weten R_S en R_B (componenten H_B en V_B). Willen deze twee krachten in evenwicht met elkaar zijn dan zullen hun werklijnen moeten samenvallen. Dit wil zeggen dan de werklijn van R_B door het punt S moet gaan.

Dan is: $H_B = \frac{4}{5} \cdot V_B = \frac{4}{5} \cdot 90 = 72$ kN.

Omgekeerd gaat de werklijn van R_S door het steunpunt B.

Verder zal $R_S = R_B$ moeten zijn. Dus ook $H_S = H_B = 72$ kN en $V_S = V_B = 90$ kN.



De grootte van H_A vinden we uit het evenwicht van de totale constructie:

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A + H_B - 80 = 0$

$H_A + 72 - 80 = 0 \rightarrow H_A = 8$ kN

De grootte van alle oplegreacties (H_A, V_A, H_B en V_B) alsmede van de kracht in punt S (R_S met componenten H_S en V_S) is hiermee bekend.

Als controle gaan we nog het evenwicht na van het linkerblok. Hiervoor geldt dat:

$\Sigma H = H_A + H_S - H = 8 + 72 - 80 = 0$

$\Sigma V = V_A + V_S = 90 - 90 = 0$

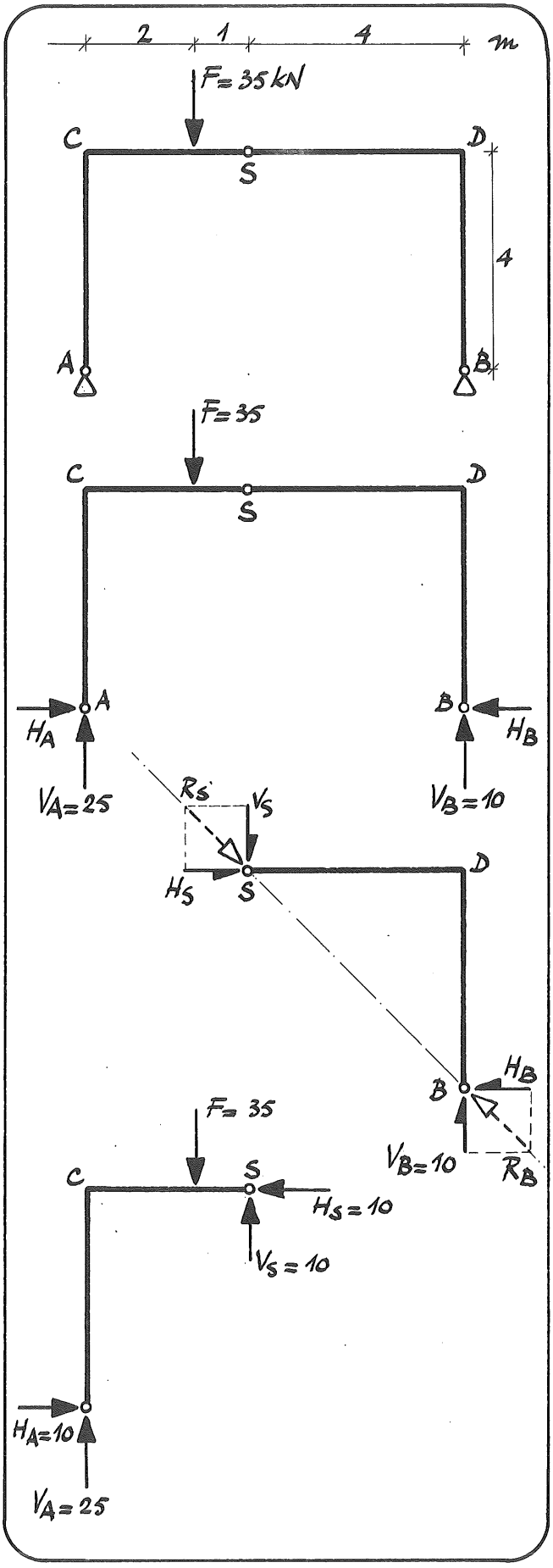
$\Sigma M_A = H_S \cdot 5 + V_S \cdot 4 - H \cdot 9 =$

$= 72 \cdot 5 + 90 \cdot 4 - 80 \cdot 9 = 0$

Aan alle evenwichtsvoorwaarden is voldaan, het linkerblok is dus in rust.

We zien dus dat in punt S zowel een verticale als horizontale kracht kan werken. Dit betekent dat we - zoals al eerder beweert - ook in punt S een scharnier zullen moeten aanbrengen.
Willen we een goede blokkenconstructie maken dan moeten we dus <u>drie</u> scharnieren aanbrengen, namelijk in A, B en S.

Vervangen we de twee blokken door twee L-vormige elementen dan ontstaat een constructie die we <u>driescharnierspant</u> noemen. Zo'n spant is een statisch bepaalde constructie. We hebben weliswaar in de twee scharnieropleggingen (in A en B) 2 . 2 = 4 onbekende oplegreacties, maar we hebben ook vier vergelijkingen waaruit de grootte van deze reacties kan worden berekend. Deze vergelijkingen volgen uit de drie evenwichtsvoorwaarden en de voorwaarde dat het moment ter plaatse van het scharnier S gelijk moet zijn aan nul.



Als voorbeeld beschouwen we eens een driescharnierspant ACDB, in S voorzien van een scharnier en belast door een verticale kracht F = 35 kN.

We bepalen de grootte van de oplegreacties in A en B met behulp van de evenwichtsvoorwaarden.

Op de totale constructie van het spant werken de krachten F, H_A, V_A, H_B en V_B.

Voor het evenwicht geldt:

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A - H_B = 0 \qquad \rightarrow H_A = H_B$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow F \,.\, 2 - V_B \,.\, 7 = 0$

$35 \,.\, 2 - V_B \,.\, 7 = 0 \rightarrow V_B = 10$ kN

$\Sigma V = 0 \quad V_A + V_B - F = 0$

$V_A + 10 - 35 = 0 \rightarrow V_A = 25$ kN

Op de onbelaste rechterhelft BDS van het spant werken de krachten H_B, V_B, H_S en V_S.

Uit $\Sigma V = 0$ volgt direct: $V_S = V_B = 10$ kN.

Uit $\Sigma M_S = 0$ volgt:

$H_B \,.\, 4 - V_B \,.\, 4 = 0 \quad \rightarrow \quad H_B = V_B = 10$ kN.

Uit $\Sigma H = 0$ volgt dan: $H_S = H_B = 10$ kN.

Uit het totale evenwicht hebben we al afgeleid dat $H_A = H_B$. Dus $H_A = 10$ kN.

We hadden de grootte van kracht H_B ook kunnen bepalen uit de voorwaarde dat de werklijn van de totale oplegreactie R_B in steunpunt B door het scharnier in S moet gaan.

We vinden dan:

$H_B = \frac{4}{4} \,.\, V_B = V_B = 10$ kN.

Op de belaste linkerhelft ACS van het spant werken de krachten F = 35 kN, H_A = 10 kN, V_A = 25 kN, H_S = 10 kN en V_S = 20 kN.

Controleren we het evenwicht van deze helft dan vinden we:

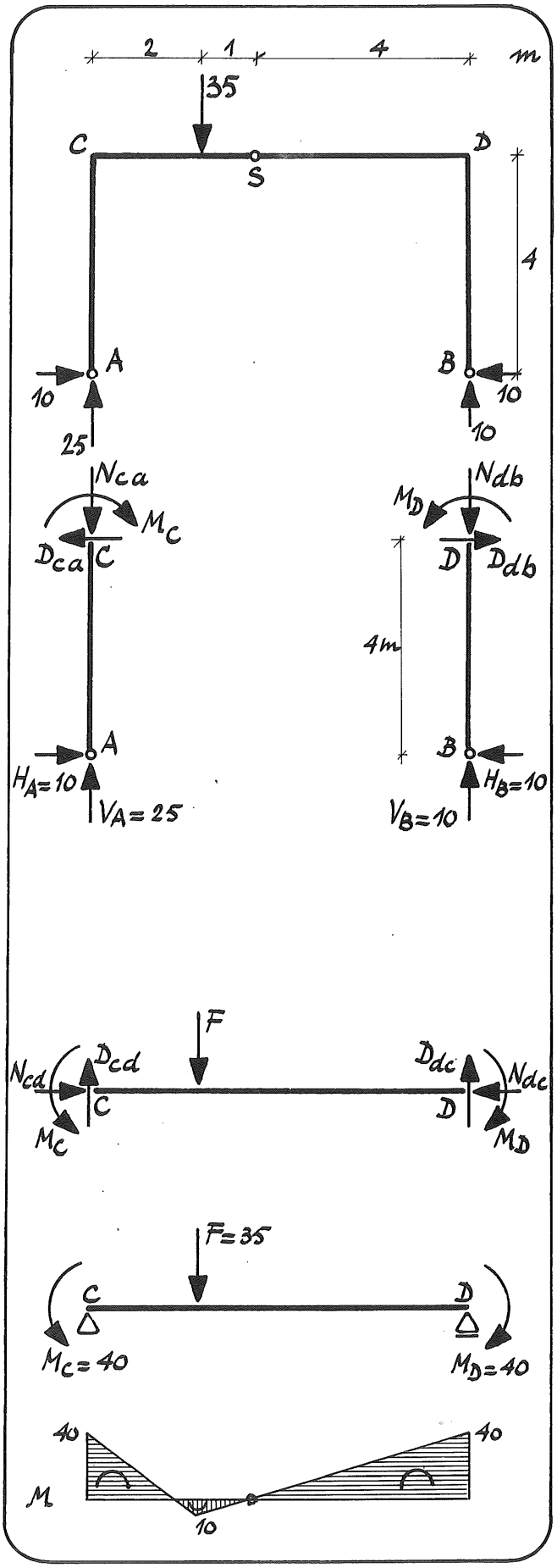
$\Sigma H = H_A - H_S = 10 - 10 = 0$

$\Sigma V = V_A + V_S - F = 25 + 10 - 35 = 0$

$\Sigma M_S = V_A \,.\, 3 - H_A \,.\, 4 - F \,.\, 1 =$

$= 25 \,.\, 3 - 10 \,.\, 4 - 35 \,.\, 1 = 0$

Ook de linkerhelft is dus in evenwicht.



De grootte van alle oplegreacties en de componenten van de kracht in het scharnier S zijn nu bekend. Met behulp van deze gegevens kunnen we voor het spant de M-, D- en N-lijn bepalen. We snijden daartoe het spant in C en D door en bekijken het evenwicht van de stijlen AC en BD en regel CD afzonderlijk.

Voor stijl AC geldt:

$N_{AC} = V_A = 25$ kN $\qquad N_{CA} = V_A = 25$ kN

$D_{AC} = H_A = 10$ kN $\qquad D_{CA} = H_A = 10$ kN

$H_A = 0$ $\qquad M_C = H_A \cdot 4 = 40$ kNm

Voor stijl BD geldt:

$N_{BD} = V_B = 10$ kN $\qquad N_{DB} = V_B = 10$ kN

$D_{BD} = H_B = 10$ kN $\qquad D_{DB} = H_B = 10$ kN

$M_B = 0$ $\qquad M_D = H_B \cdot 4 = 40$ kNm

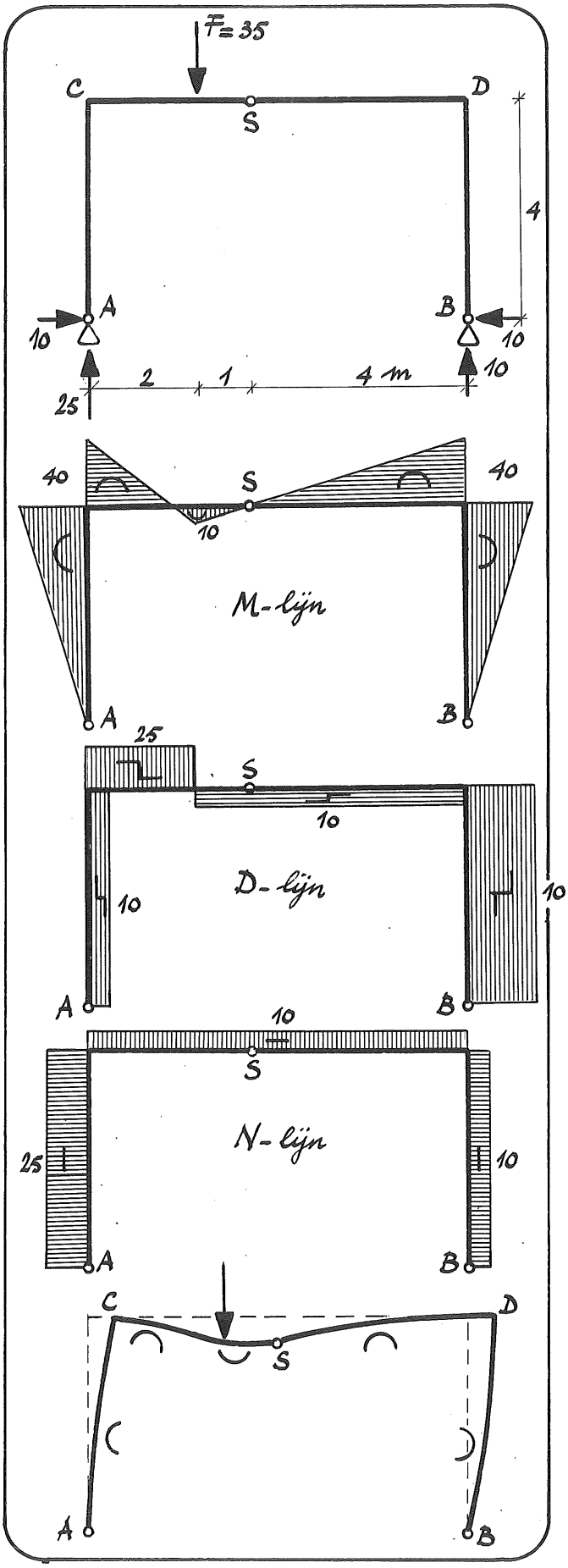
(met N_{AC} bedoelen we de normaalkracht in stijl AC in het punt A; N_{CA} is dan de normaalkracht in stijl AC in het punt C; evenzo is D_{AC} de dwarskracht in A en D_{CA} de dwarskracht in C; we schrijven echter niet M_{CA} omdat voor hoekpunt C geldt dat $M_{CA} = M_{CD} = M_C$).

Voor regel CD geldt:

$N_{CD} = D_{CA} = 10$ kN; $\qquad N_{DC} = D_{DB} = 10$ kN

$D_{CD} = N_{CA} = 25$ kN; $\qquad D_{DC} = N_{DB} = 10$ kN

Voor het bepalen van de M-lijn voor regel CD kunnen we deze regel beschouwen als een ligger op twee steunpunten, belast door kracht F en de momenten M_C en M_D.
De M-lijn volgt dan uit een eenvoudige superpositie.



We kunnen nu de M-, D- en N-lijn voor het spant tekenen.

Het verloop van de M-lijn voor regel CD is reeds bepaald.
Het verloop van de M-lijn voor de stijlen AC en BD is rechtlijnig omdat op deze stijlen geen uitwendige krachten aangrijpen.

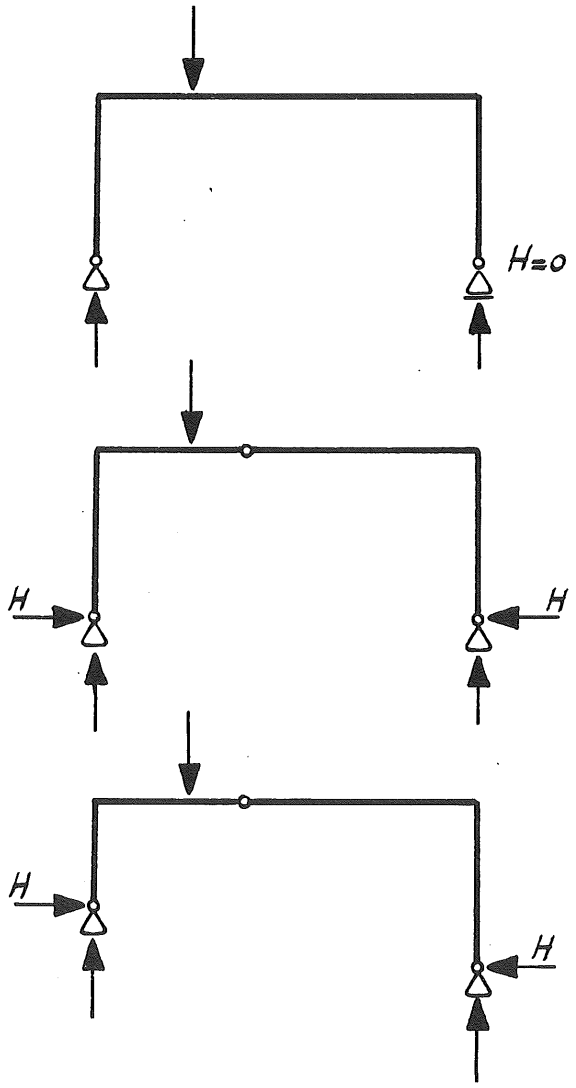
Het verloop van de D-lijn wordt niet beïnvloed door het scharnier in S. Een scharnier kan immers een verticale kracht overbrengen.

Het verloop van de N-lijn wordt evenmin beïnvloed door het scharnier in S; een scharnier kan een horizontale kracht overbrengen.

Tenslotte maken we nog een schets van de elastische lijn.

We hebben in het voorgaande de krachtsverdeling in een driescharnierspant bepaald uitgaande van de evenwichtsvoorwaarden $\Sigma H = 0$, $\Sigma V = 0$ en $\Sigma M = 0$.
Met behulp van deze voorwaarden hebben we eerst de grootte van de oplegreacties bepaald. Daarna volgt uit het evenwicht van de afzonderlijke delen van het spant de M-, D- en N-lijn voor het spant.

We zullen in hoofdstuk 17 kennismaken met andere methoden om de M-lijn te bepalen.
We moeten daarbij onderscheid maken tussen spanten met gelijke stijlen en met ongelijke stijlen en spanten belast door verticale en/of horizontale krachten.



Vergelijken we een portaalspant, uitgevoerd als statisch bepaalde constructie, met een driescharnierspant dan zien we een belangrijk verschil.
Bij belasting door uitsluitend verticale krachten ontstaan in de steunpunten van een portaalspant geen horizontale krachten, maar in de steunpunten van een driescharnierspant daarentegen altijd horizontale krachten. We hebben gezien dat we met het bepalen van de krachtsverdeling ten gevolge van de horizontale krachten voorzichtig moeten zijn.
Omdat horizontale reactiekrachten zijn te beschouwen als uitwendige krachten zullen we bij driescharnierspanten aandacht moeten besteden aan de vorm van deze spanten.
Daarom zullen we onderscheid maken tussen spanten met gelijke en met ongelijke stijlen.

3. ZELFTOETS

VRAGEN

1. Wat verstaan we onder een portaal en waar worden deze o.a. toegepast.

2. Hoe wordt een portaalspant ondersteund.

3. Hoe wordt een statisch bepaald portaalspant genoemd dat statisch onbepaald is ondersteund.

4. Een constructie die wordt ondersteund door een scharnier- en een roloplegging is een statisch bepaalde constructie. De grootte van de drie reactiekrachten die in deze opleggingen worden opgewekt kunnen worden bepaald m.b.v. de drie evenwichtsvoorwaarden $\Sigma V = 0$, $\Sigma H = 0$ en $\Sigma M = 0$. Is deze grootte van de reactiekrachten altijd afhankelijk van de vorm van de constructie.

5. Wat weten we van de inwendige krachten die werken op een afgesneden deel van een portaal rondom een hoekpunt. Balk en kolom (regel en stijl) van het portaal staan in dit hoekpunt loodrecht op elkaar en er is geen uitwendige belasting die in het hoekpunt aangrijpt.

6. In een hoekpunt van een portaal staan stijl en regel niet loodrecht op elkaar. Wat geldt voor de inwendige krachten op een afgesneden deel rondom dit hoekpunt.

3. ZELFTOETS

ANTWOORDEN

1. Een portaal of portaalspant is een constructie die is samengesteld uit twee kolommen en een balk. Portalen worden veelal toegepast als onderdeel van de draagconstructie voor een laagbouw.

2. Een portaalspant kan zowel statisch bepaald als statisch onbepaald worden ondersteund.

3. Een driescharnierspant is een statisch bepaalde constructie, dat statisch onbepaald is ondersteund.

4. De grootte van de reactiekrachten in de scharnier- en roloplegging van een constructie is altijd onafhankelijk van de vorm van deze constructie indien deze uitsluitend wordt belast door verticale krachten. Of de opleggingen wel of niet op gelijke hoogte liggen is daarbij niet van belang.
   Werken op de constructie zowel verticale als horizontale krachten dan is de grootte van de reactiekrachten niet altijd onafhankelijk van de vorm van deze constructie.

5. Een balk en een kolom (regel en stijl) van een portaal staan loodrecht op elkaar in een hoekpunt van dit portaal en er grijpt geen uitwendige belasting aan in dit hoekpunt.
   Dan geldt voor de inwendige krachten rondom dit hoekpunt:
   - de normaalkracht N_S in de stijl is even groot als de dwarskracht D_r in de regel: $N_S = D_r$
   - de dwarskracht D_S in de stijl is even groot als de normaalkracht N_r in de regel: $D_S = N_r$
   - het moment M_S in de stijl is even groot als het moment M_r in de regel: $M_S = M_r$

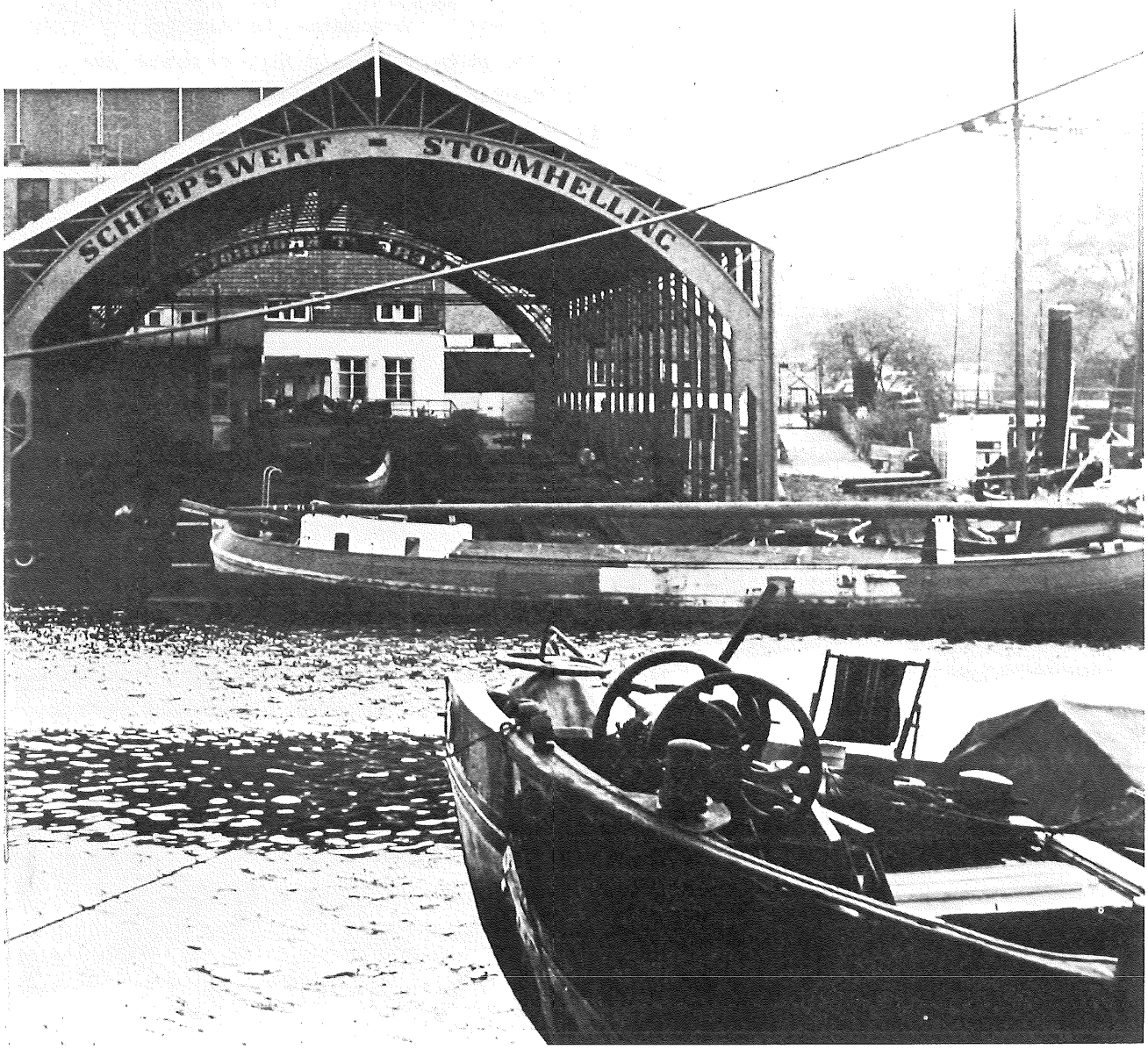
6. In een hoekpunt van een portaal staan stijl en regel niet loodrecht op elkaar. Dan geldt:
   $M_S = M_r$; $N_S \neq D_r$; $D_S \neq N_r$

VRAGEN

7. Hoe vervormen de stijlen van een portaal dat wordt belast door verticale krachten en is ondersteund door een rol- en een scharnieroplegging.

8. Wat is een driescharnierspant.

9. Hoe kunnen we de grootte van de oplegreacties in de scharnieropleggingen van een driescharnierspant bepalen volgens de analytische methode.



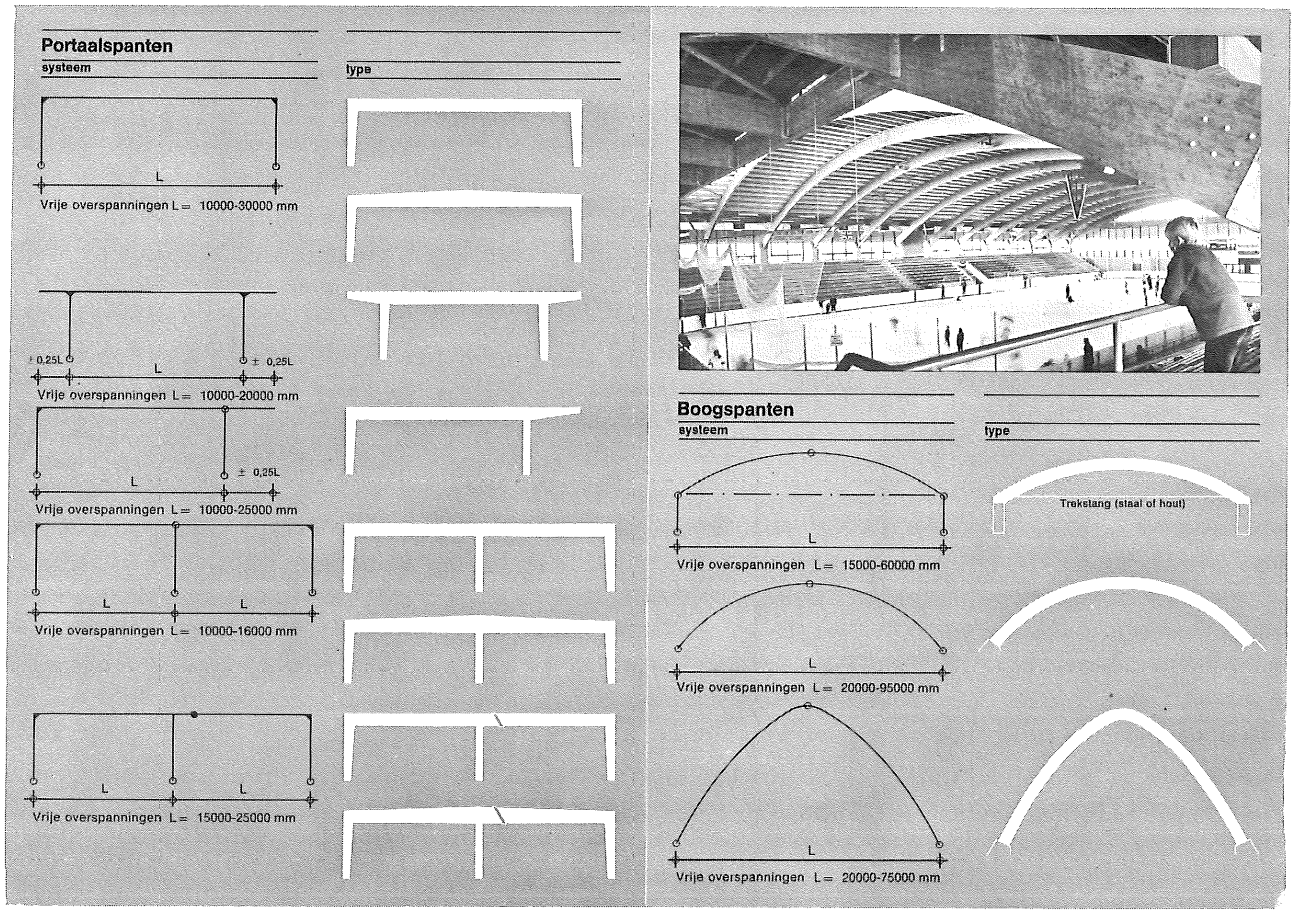
Portaalspant van de stoomscheepswerf 't Kromhout te Amsterdam

ANTWOORDEN

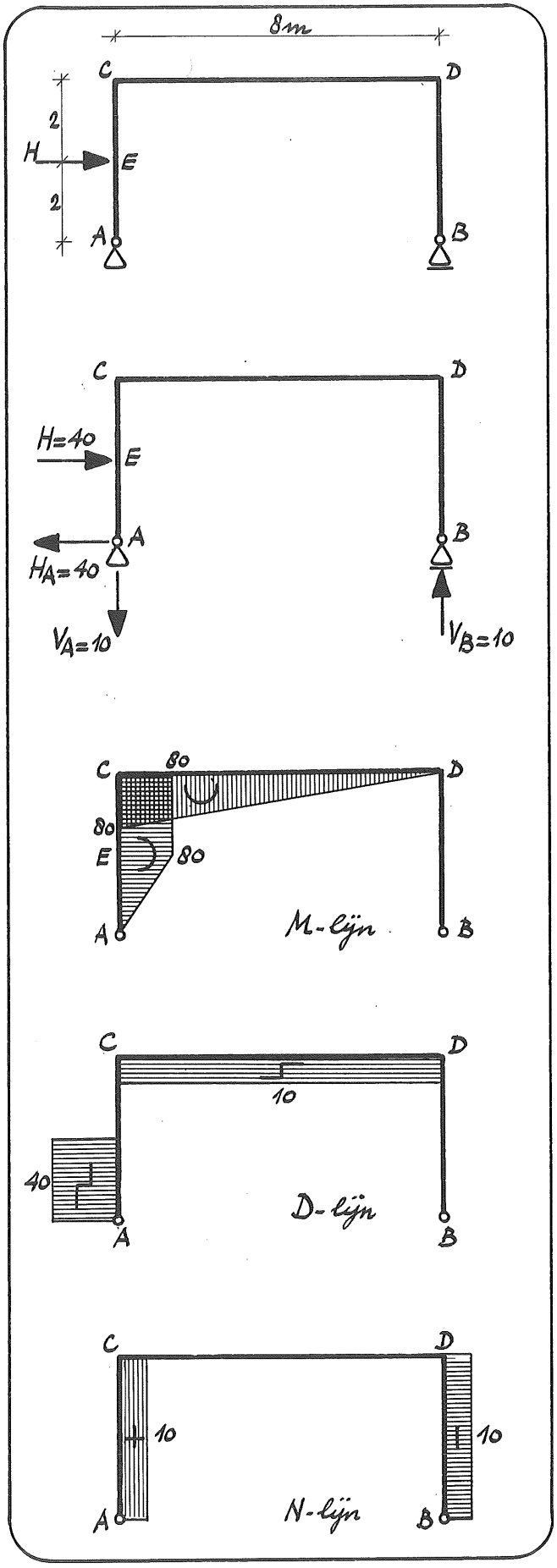
7. De stijlen van een portaal dat wordt belast door verticale krachten vervormen niet, blijven dus recht, als dit portaal wordt ondersteund door een rol- en een scharnieroplegging.

8. Een <u>driescharnierspant</u> is een constructie met drie scharnieren.
   Twee scharnieren bevinden zich in de twee opleggingen van het spant, één scharnier bevindt zich in de constructie van het spant.

9. We kunnen de grootte van de oplegreacties in de scharnieropleggingen van een driescharnierspant bepalen door:
   - het evenwicht te beschouwen van het gehele spant
   - èn het evenwicht te beschouwen van het linker- of rechterdeel van het spant



Deel van het produktieprogram van een fabiek in gelamineerd hout



4. VOORBEELDEN

Voorbeeld 1

Een portaalspant ACDB wordt belast door een horizontale kracht H = 40 kN.
We willen de grootte van de oplegreacties in A en B weten en de M-, D- en N-lijn voor het gehele spant.

Op het spant werken de reactiekrachten H_A, V_A en V_B.
Uit de evenwichtsvoorwaarde volgt:

$\Sigma H = 0 \rightarrow H - H_A = 40 - H_A = 0 \rightarrow H_A = 40$ kN

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow H \cdot 2 - V_B \cdot 8 =$
$40 \cdot 2 - V_B \cdot 8 = 0 \rightarrow V_B = 10$ kN

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = 10$ kN

Voor de M-lijn geldt voor

stijl AC: $M_E = H_A \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80$ kNm
$M_C = H_A \cdot 4 - H \cdot 2$
$= 40 \cdot 4 - 40 \cdot 2 = 80$ kNm

stijl BD: $M_D = 0$

regel CD: $M_{Cregel} = M_{Cstijl} = 80$ kNm
$M_{Dregel} = M_{Dstijl} = 0$

Voor de D-lijn geldt voor

stijl AC: in deel AE $D = H_A = 40$ kN
in deel EC $D = H_A - H = 40 - 40 = 0$

stijl BD: $D = 0$

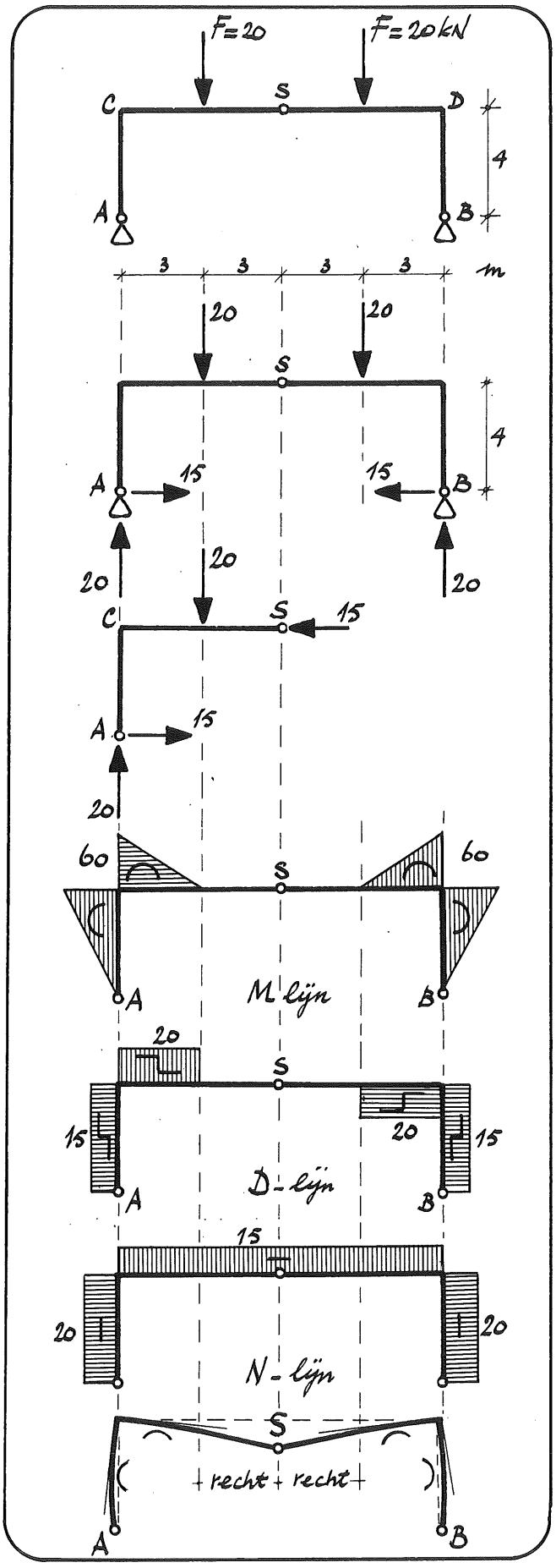
regel CD: $D_C = V_A = 10$ kN
$D_D = V_B = 10$ kN

Voor de N-lijn geldt voor:

stijl AC: $N = V_A = 10$ kN (trek)

stijl BD: $N = V_B = 10$ kN (druk)

regel CD: $N = 0$



Voorbeeld 2

Een driescharnierspant ACDB wordt belast door twee gelijke verticale krachten $F = 20$ kN.

We merken op dat de constructie van het spant en de belasting van het spant symmetrisch zijn.
Dan geldt voor de verticale reactiekrachten in A en B:
$V_A = V_B = F = 20$ kN.

Beschouwen we de linkerhelft ACS van het spant dan vinden we voor het moment ten opzichte van S:

$\Sigma M_S = 0 \rightarrow V_A \cdot 6 - H_A \cdot 4 - F \cdot 3 = 0$

$20 \cdot 6 - H_A \cdot 4 - 20 \cdot 3 = 0$

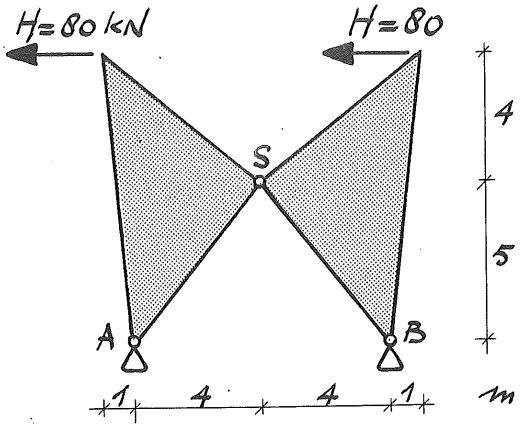
$\rightarrow H_A = 15$ kN

Dan is ook (symmetrie) $H_B = 15$ kN

De krachten in het scharnier S zijn:
$V_S = 0$ (symmetrie); of $V_S = V_A - F = 0$
$H_S = H_A = 15$ kN.

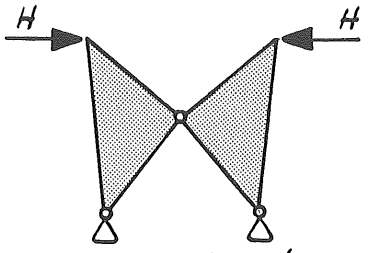
We geven nu zonder verdere uitleg de M-, D- en N-lijn.
De M-lijn voor regel CD is bepaald door deze regel te beschouwen als een ligger op twee steunpunten, aan de einden belast door een moment $M = 60$ kNm en verder door de krachten F.

Het is echter ook mogelijk om de M-lijn voor regel CD te bepalen vanuit het midden S. Omdat $V_S = 0$ volgt voor het moment in het regeldeel tussen de twee krachten F direct dat dit moment gelijk moet zijn aan nul.



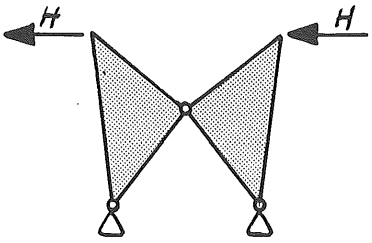
Voorbeeld 3

Een blokkenconstructie wordt belast door twee gelijke horizontale krachten H = 80 kN.
We willen de oplegreacties en de krachten in het scharnier S weten als we het gewicht van de blokken buiten beschouwing laten.



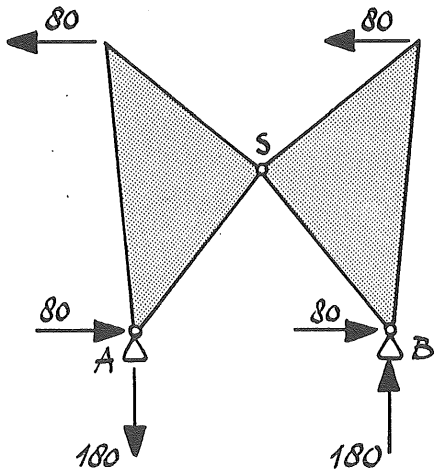
symmetrische belasting

De constructie van de blokken is symmetrisch. Bij een symmetrische belasting van de blokken zouden deze blokken worden belast door twee gelijke krachten H, die tegengesteld gericht zijn.



keersymmetrische belasting

Bij de gegeven belasting werken echter de beide gelijke krachten H in dezelfde richting. We spreken dan van een keersymmetrische belasting.



Vanwege de keersymmetrische belasting op de symmetrische blokkenconstructie kunnen we direct zien dat:

$H_A = H_B = H = 80$ kN en $H_S = 0$.

Verder volgt uit:

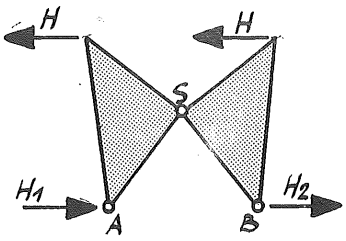
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot 8 - 2H \cdot 9 = 0$

$V_A \cdot 8 - 160 \cdot 9 = 0 \rightarrow V_A = 180$ kN

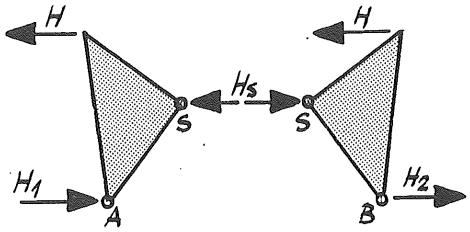
$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A - V_B = 0 \rightarrow V_B = 180$ kN

Dan is: $V_S = V_A = 180$ kN

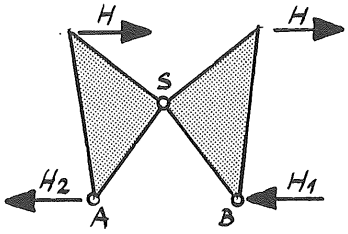
We zullen deze snelle oplossing nader toelichten.



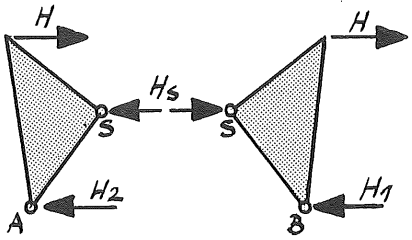
Stel kracht H_1 is de horizontale oplegreactie in A en kracht H_2 die in B.



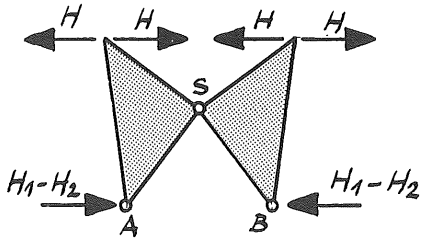
De horizontale kracht in scharnier S is kracht H_S.



Draaien we de krachten H van richting om dan wordt de belasting het spiegelbeeld van de gegeven belasting. Dan wordt kracht H_2 de horizontale oplegreactie in A en kracht H_1 die in B.

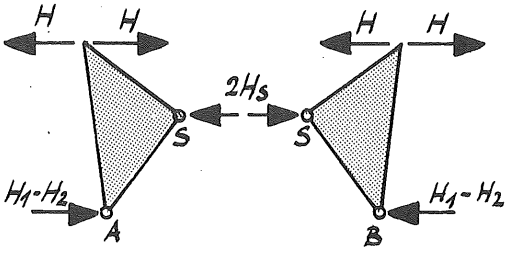


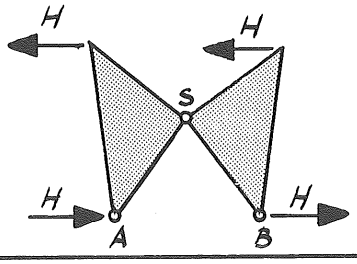
De horizontale kracht in scharnier S is weer kracht H_S.



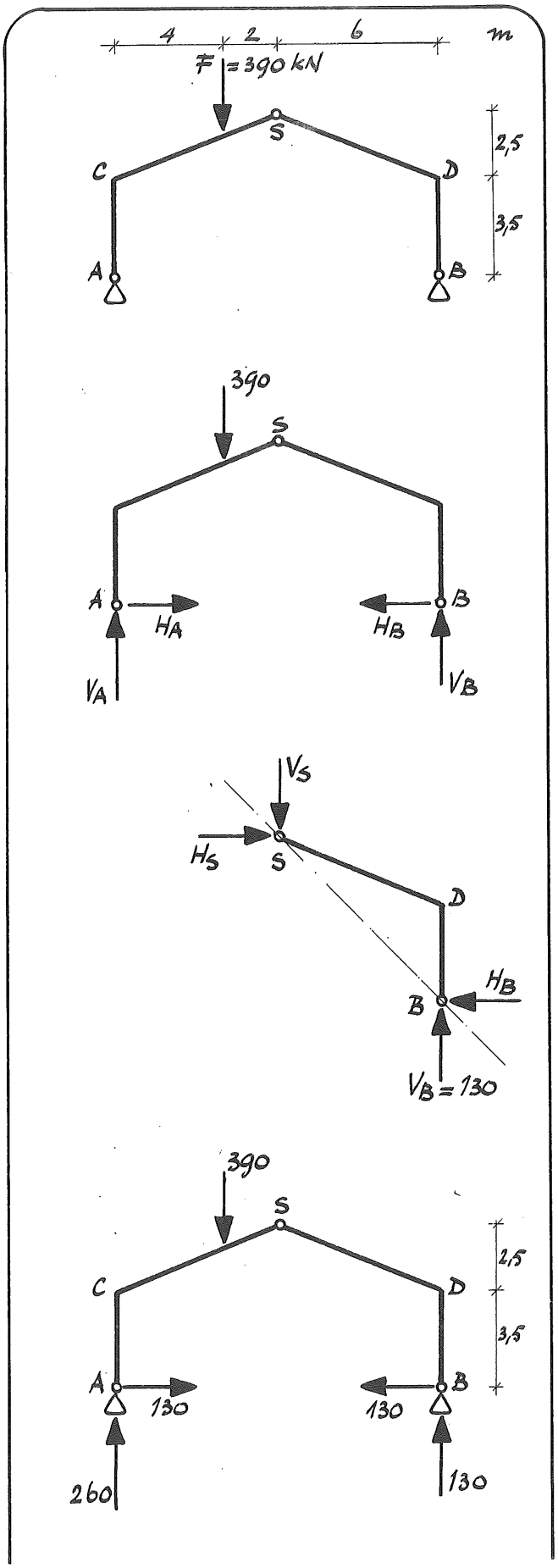
Superponeren we beide belastinggevallen dan vinden we een totale belasting nul.
Niettemin is de horizontale oplegreactie in A en B een kracht ter grootte $H_1 - H_2$ en in scharnier S ter grootte $2H_S$. Deze krachten zullen ook gelijk aan nul moeten zijn.
We vinden dus:

$H_1 - H_2 = 0 \rightarrow H_1 = H_2$
$2H_S = 0 \rightarrow H_S = 0.$





Uit $\Sigma H = 0$ voor de totale constructie volgt dan:
$H_A = H_B = H.$
Dan is ook duidelijk waarom $H_S = 0$



Voorbeeld 4

Een driescharnierspant wordt belast door een verticale kracht F = 390 kN.

Op het spant werken de reactiekrachten H_A, V_A en V_B.
Uit de evenwichtsvoorwaarden voor het totale spant volgt:

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot 12 - F \cdot 8 = 0$

$V_A \cdot 12 - 390 \cdot 8 = 0 \rightarrow V_A = 260$ kN

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_B - F = 0$

$260 + V_B - 390 = 0 \rightarrow V_B = 130$ kN

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A - H_B = 0$

Op de onbelaste rechterhelft BDS werken de krachten H_B, V_B, H_S en V_S.

Hiervoor geldt:

$\Sigma M_S = 0 \rightarrow H_B \cdot 6 - V_B \cdot 6 = 0$

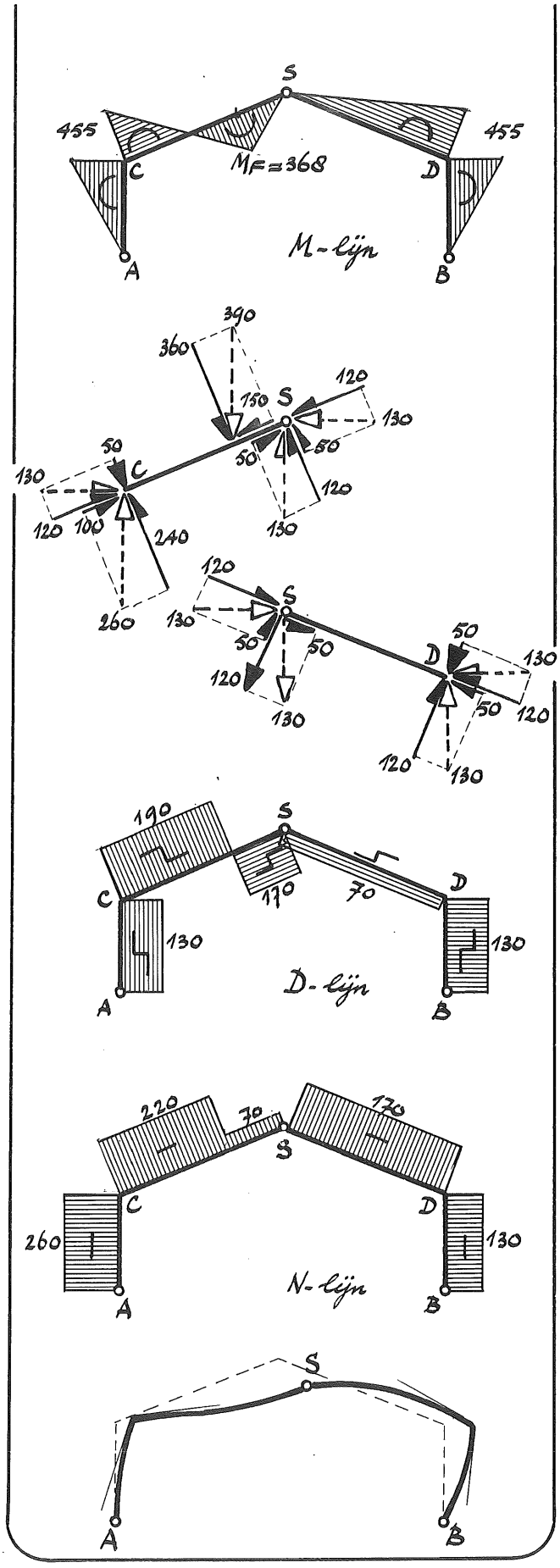
$\rightarrow H_B = V_B = 130$ kN

Uit $H_A - H_B = 0$ volgt dan: $H_A = 130$ kN

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_B - V_S = 0 \rightarrow V_S = 130$ kN

$\Sigma M = 0 \rightarrow H_B - H_S = 0 \rightarrow H_S = 130$ kN

Met behulp van de gevonden waarden van de oplegreacties kunnen we de M-, D- en N-lijn voor het spant bepalen.



Voor de M-lijn geldt:

stijl BD: $M_B = 0$

$M_D = H_B \cdot 3{,}5 = 130 \cdot 3{,}5 =$
$= 455$ kNm

regel DS: $M_D = 455$ kNm

$M_S = 0$

stijl AC: $M_A = 0$

$M_C = H_A \cdot 3{,}5 = 130 \cdot 3{,}5 =$
$= 455$ kNm

regel CS: $M_C = 455$ kNm

$M_F = V_A \cdot 4 - H_A \left(3{,}5 + \frac{2}{3} \cdot 2{,}5\right)$
$= 260 \cdot 4 - 130 \cdot 5{,}17 =$
$= 368{,}5$ kNm

$M_S = 0$

Voor het bepalen van de D- en N-lijn moeten voor de regels CS en DS de horizontale en verticale krachten ontbinden in twee richtingen, langs en loodrecht op de regels.

Voor de D-lijn geldt dan:

stijl AC: D = 130 kN

regel CS: deel CF: D = 240 - 50 = 190 kN

deel FS: D = 120 + 50 = 170 kN

regel DS: D = 120 - 50 = 70 kN

stijl BD: D = 130 kN

Voor de N-lijn geldt:

stijl AC: N = 260 kN (druk)

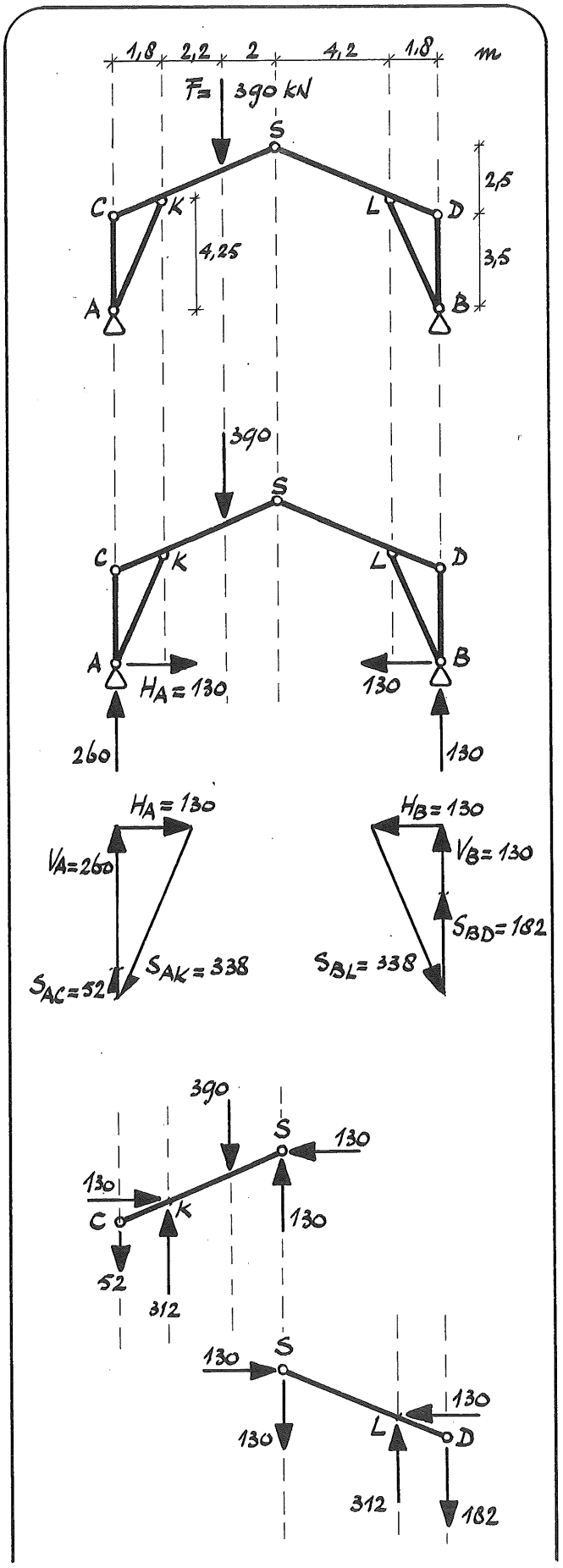
regel CS: deel CF: N = 120 + 100 =
= 220 kN (druk)

deel FS: N = 120 + 50 =
= 70 kN (druk)

regel DS: N = 120 + 50 = 170 kN (druk)

stijl BD: N = 130 kN (druk)

Tenslotte nog een schets van de elastische lijn.



Voorbeeld 5

Het getekende spant is te beschouwen als een driescharnierspant.
Vorm en afmetingen van dit spant zijn gelijk aan die van het vorige voorbeeld.
In het vorige voorbeeld hebben we de hoekpunten C en D beschouwd als vormvaste verbindingen. In het gegeven spant zijn deze stijve verbindingen vervangen door de vormvaste driehoeken ACK en BDL. De staven AC en AK resp. BD en BL zijn pendelstaven.
Het spant wordt belast door F = 390 kN.

Aan het uitwendig evenwicht verandert niets t.o.v. het vorige beeld. Dus:

$H_A = H_B = 130$ kN; $V_A = 260$ kN; $V_B = 130$ kN
$H_S = 130$ kN; $V_S = 130$ kN.

Beschouwen we het evenwicht rondom de steunpunten A en B dan vinden we voor de krachten in de pendelstaven:

$$S_{AC} = \frac{4,25}{1,8} \cdot 130 - 260 = 52 \text{ kN (trek)}$$

$$S_{BD} = \frac{4,25}{1,8} \cdot 130 - 130 = 182 \text{ kN (trek)}$$

$$S_{AK} = \sqrt{130^2 + (260 + 52)^2} = 338 \text{ kN (druk)}$$

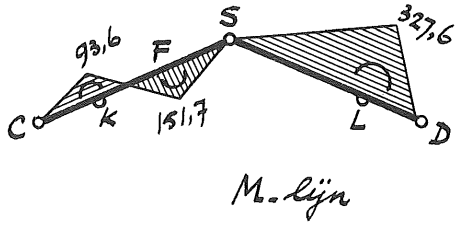
$$S_{BL} = \sqrt{130^2 + (130 + 182)^2} = 338 \text{ kN (druk)}$$

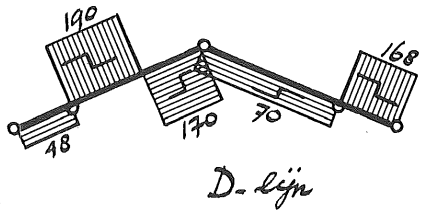
Regel CS wordt belast door de krachten S_{AC}, S_{AK}, F, S_H en S_V.
De horizontale en verticale component van S_{AK} zijn:

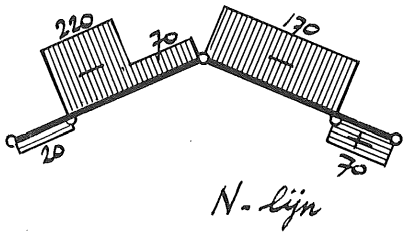
$H_{AK} = 130$ kN en $V_{AK} = 312$ kN.

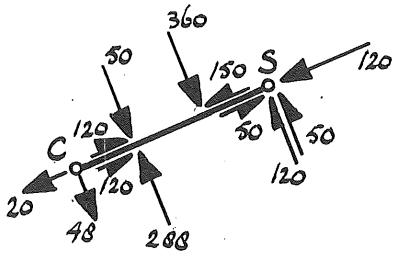
Regel DS wordt belast door de krachten S_{BD}, S_{BL}, S_H en S_V.
De horizontale en verticale component van S_{BL} zijn:

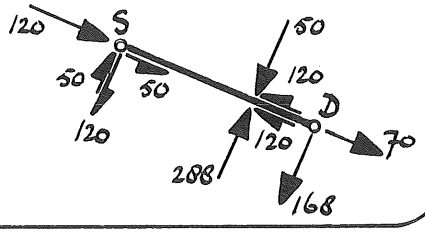
$H_{BL} = 130$ kN en $V_{BL} = 312$ kN.











We hebben nu alle gegevens om de M-, D- en N-lijn voor de regels CS en DS te kunnen tekenen.

Voor de M-lijn geldt voor:

regel CS: $M_C = 0$

$M_K = 52 \cdot 1{,}8 = 93{,}6$ kNm

$M_F = 130 \cdot 2 - 130 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2{,}5$

$= 151{,}7$ kNm

regel DS: $M_L = 182 \cdot 1{,}8 = 327{,}6$ kNm

Voor de D-lijn geldt voor:

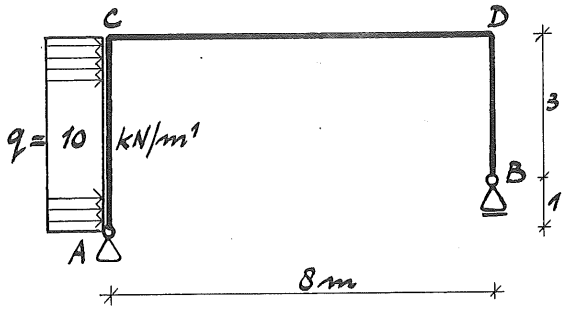
regel CS:	deel CK	D = 48 kN
	deel KF	D = 190 kN
	deel FS	D = 170 kN
regel DS:	deel DL	D = 168 kN
	deel LS	D = 70 kN

Voor de N-lijn geldt:

regel CS:	deel CK	N = 20 kN (trek)
	deel KF	N = 220 kN (druk)
	deel FS	N = 70 kN (druk)
regel DS:	deel BL	N = 70 kN (trek)
	deel LS	N = 170 kN (druk)

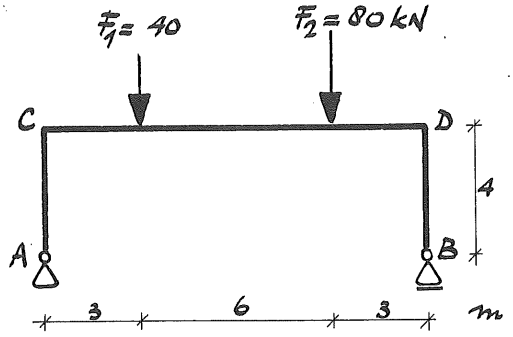
<u>Opmerking</u>

De gevonden waarden voor de dwars- en normaalkracht volgen direct uit de belasting voor de regels CS en DS door alle krachten te ontbinden langs en loodrecht op deze regels.

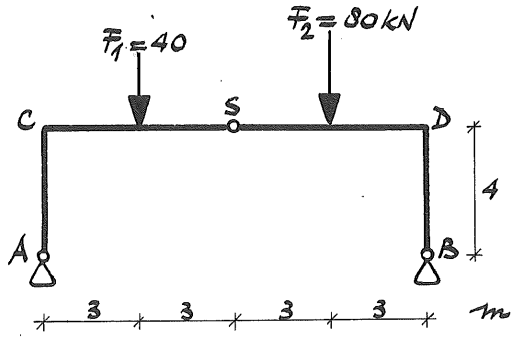


5. VRAAGSTUKKEN

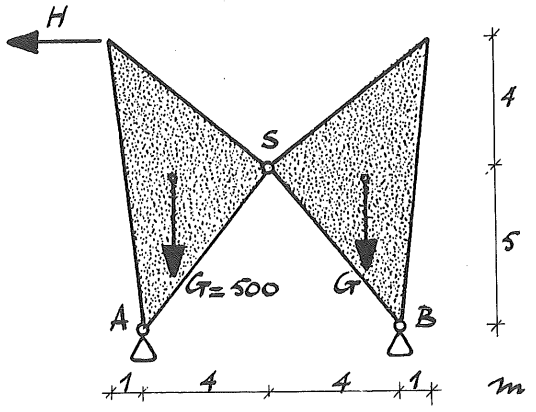
1. Op een portaalspant ACDB werkt een horizontale gelijkmatig verdeelde belasting q = 10 kN/m'.
Bereken de oplegreacties en bepaal de M-, D- en N-lijn.



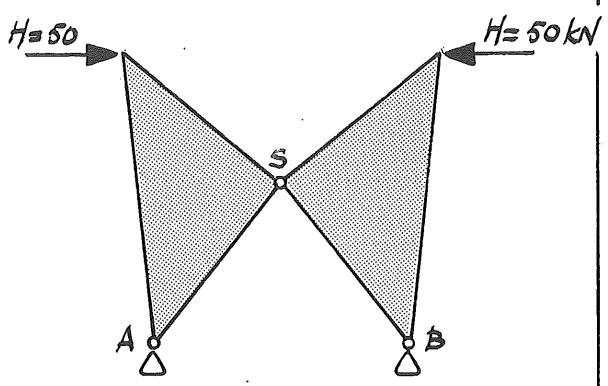
2. Een portaalspant ACDB wordt belast door twee verticale krachten F_1 = 40 kN en F_2 = 80 kN.
Bepaal de grootte van de oplegreacties en de M-, D- en N-lijn voor het gehele spant.



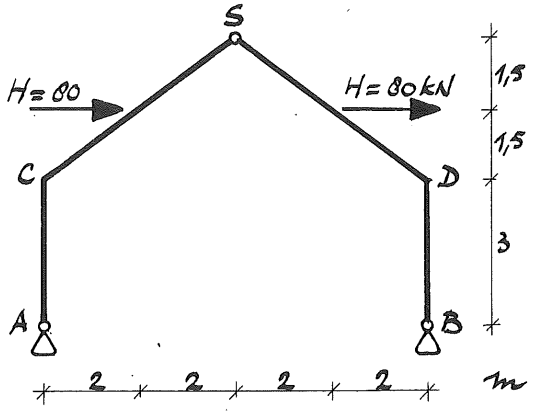
3. Een driescharnierspant ACDB wordt belast door twee verticale krachten F_1 = 40 kN en F_2 = 80 kN.
Bepaal de grootte van de oplegreacties en de krachten in het scharnier S. Bepaal verder de M-, D- en N-lijn voor het gehele spant.



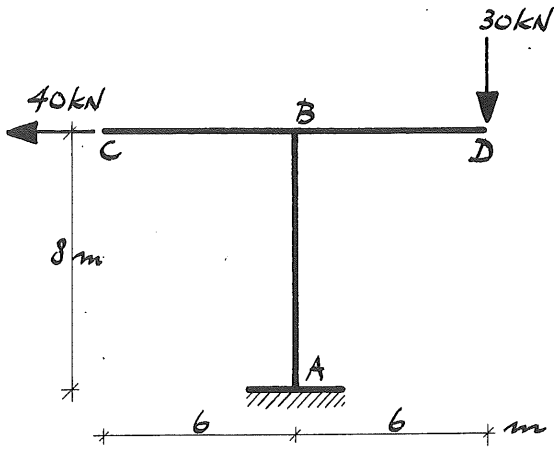
4. Een blokkenconstructie wordt samengesteld uit twee blokken met een gewicht G = 500 kN. Op deze constructie werkt verder nog een kracht H.
Hoe groot moet kracht H zijn
a. opdat de horizontale component van de scharnierkracht in S gelijk is aan nul
b. opdat de verticale component van de scharnierkracht in S gelijk is aan nul



5. Een blokkenconstructie wordt belast door twee krachten H = 50 kN.
Bepaal de reactiekrachten in de scharnieropleggingen A en B en in het scharnier S.
Het gewicht van de blokken wordt buiten beschouwing gelaten.



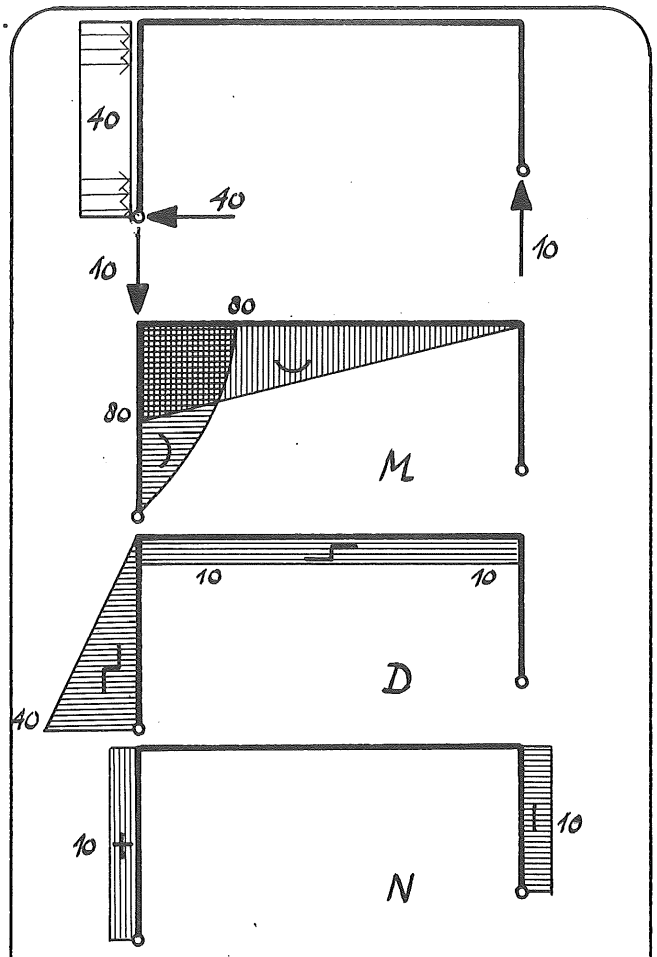
6. Een driescharnierspant ACDB wordt belast door twee horizontale krachten H = 80 kN.
Bereken de oplegreacties in A en B en de krachten in het scharnier S en bepaal de M-, D- en N-lijn van het spant.



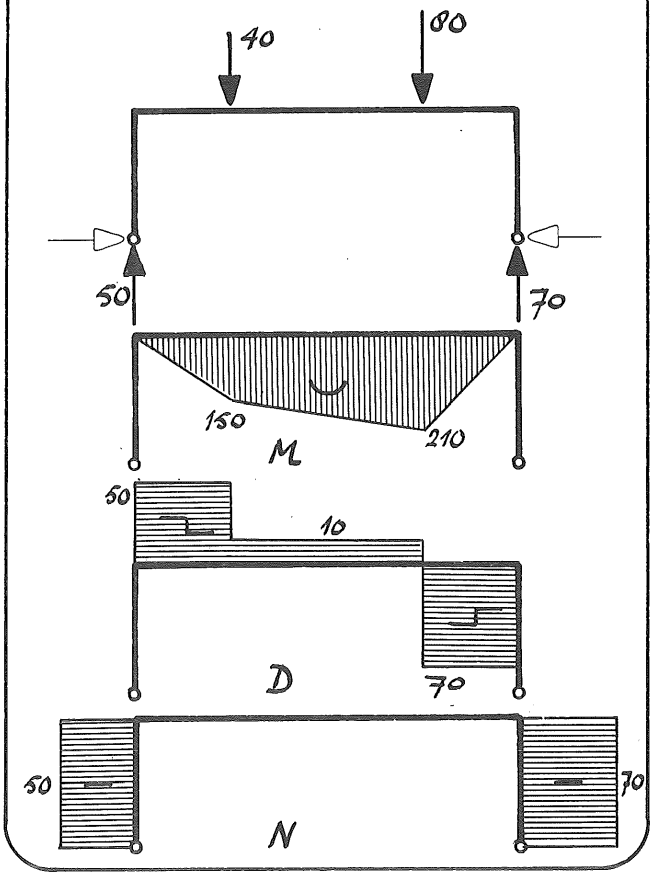
7. Bepaal de doorsnede van stijl AB waarin het buigend moment nul is.

ANTWOORDEN

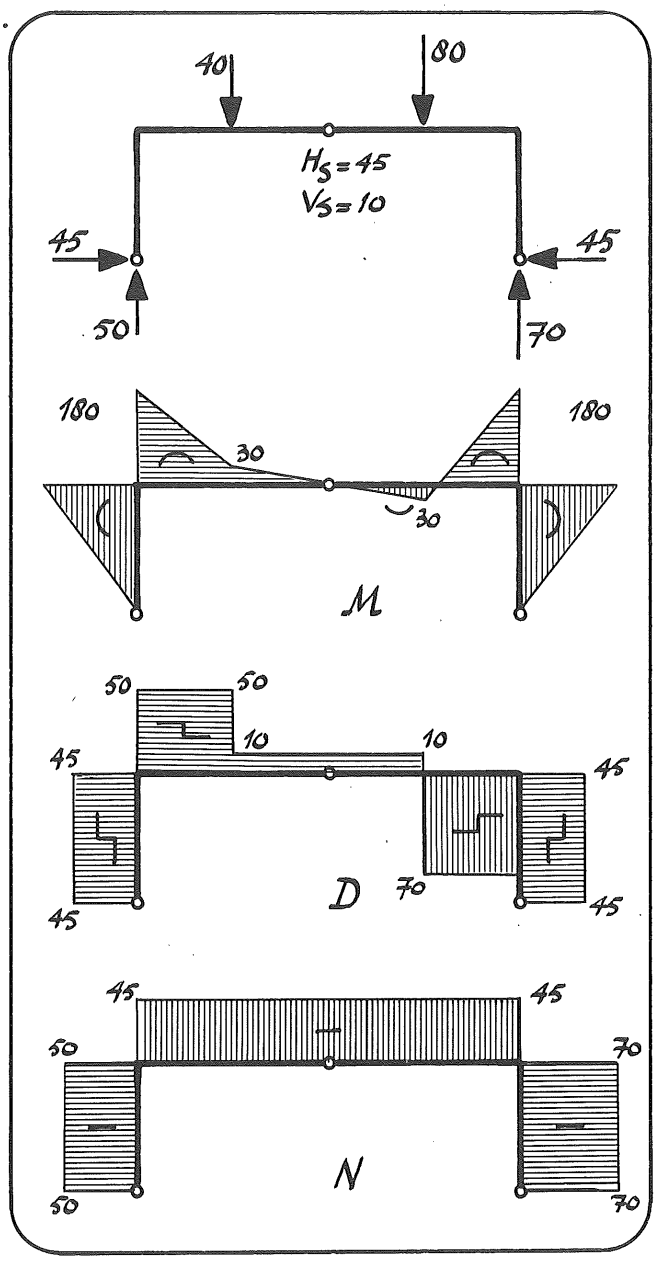
1.



2.



3.

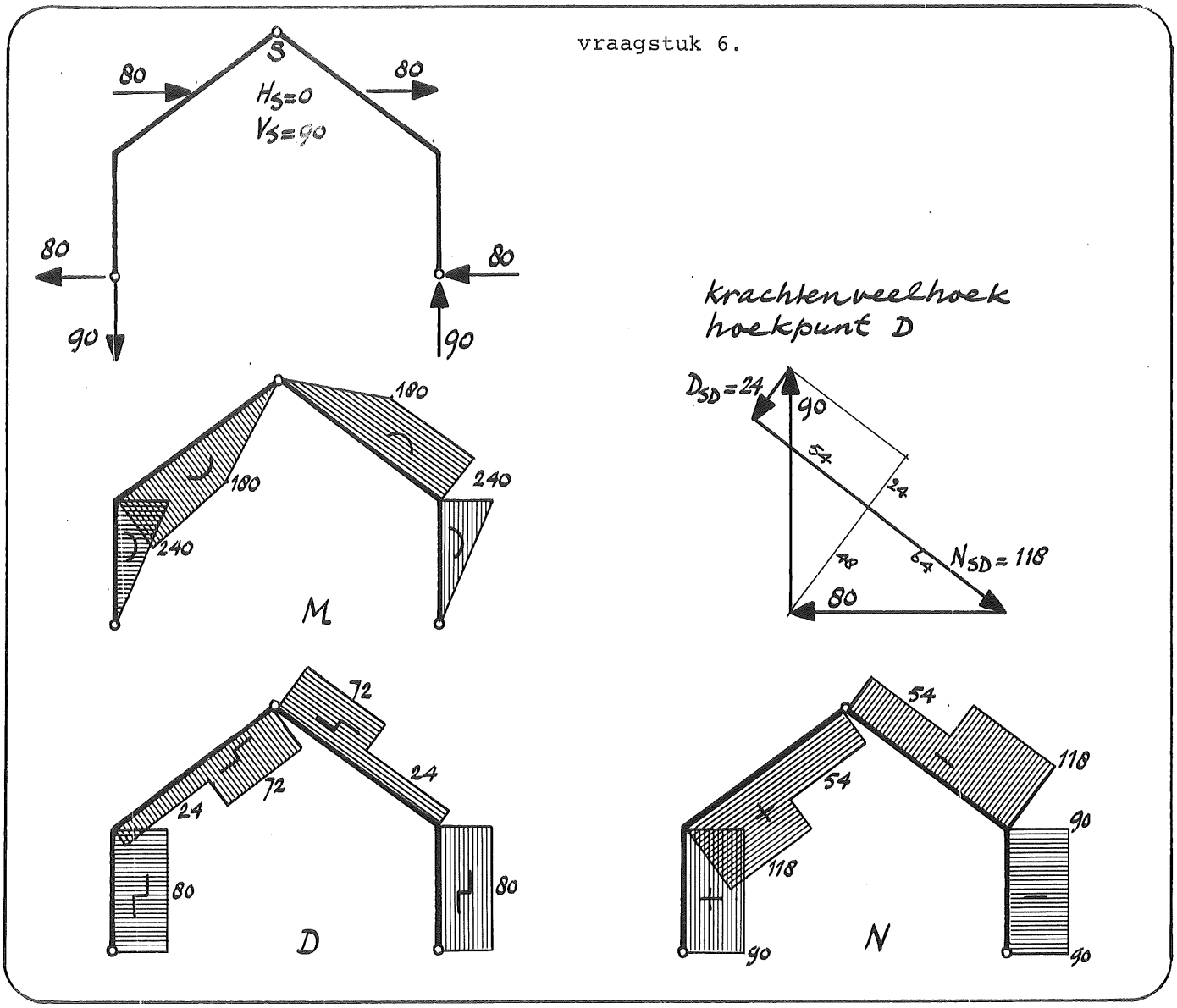


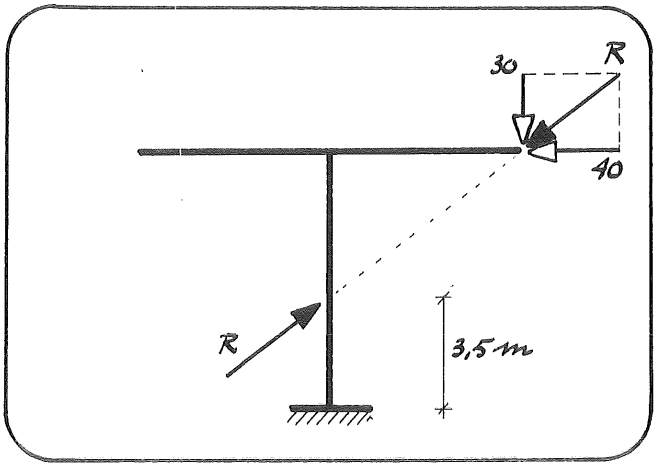
4a. $H = \frac{2}{9} G$

4b. $H = 0$

5. $H_A = 40$ (→)
$V_A = 0$
$H_B = 40$ (←)
$V_B = 0$
$H_S = 90$ (druk)
$V_S = 0$

vraagstuk 6.





vraagstuk 7.