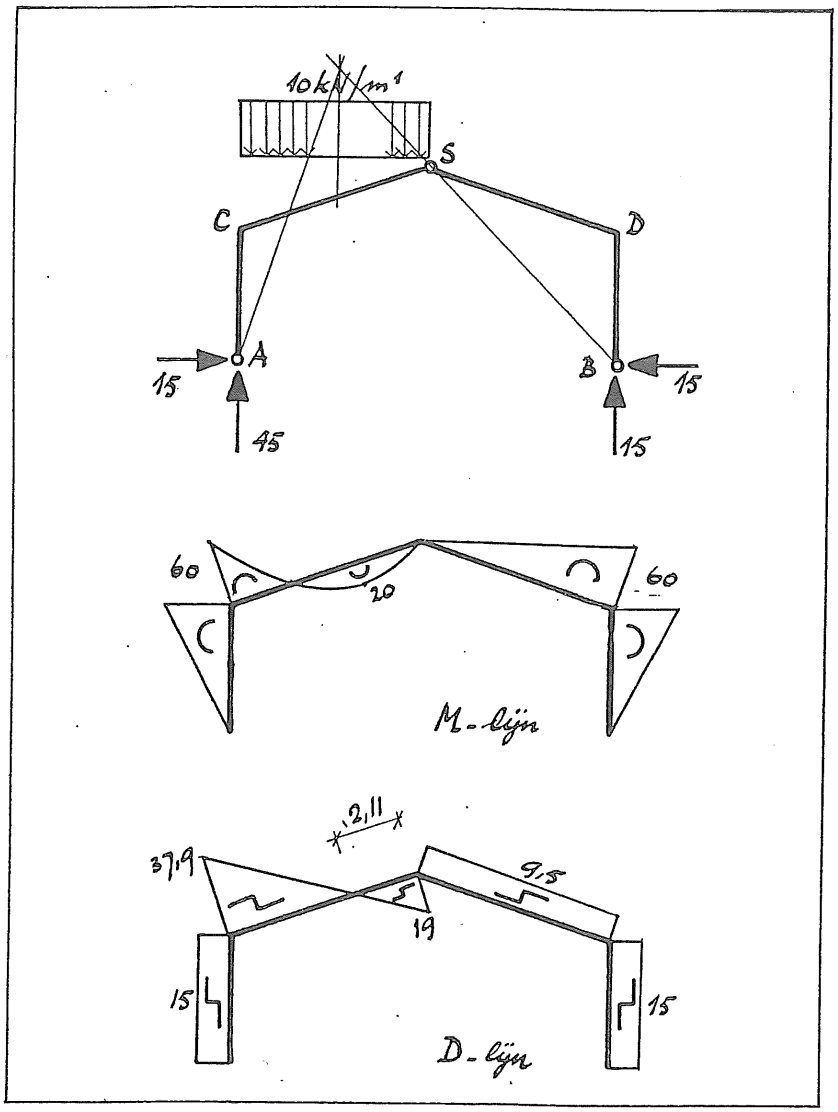
Krachtswerking

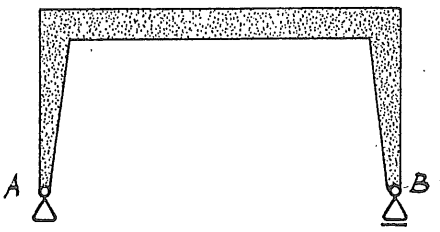
spanten



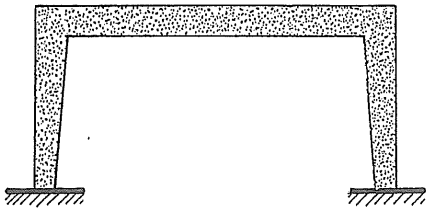
TU Delft

Faculteit Bouwkunde

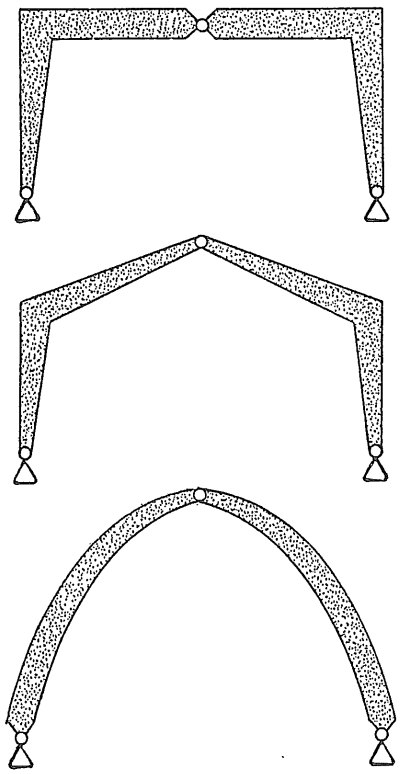
Technische Universiteit Delft



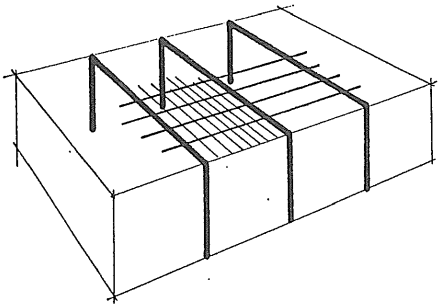
portaalspant



statisch onbepaald



3- scharnierspanten



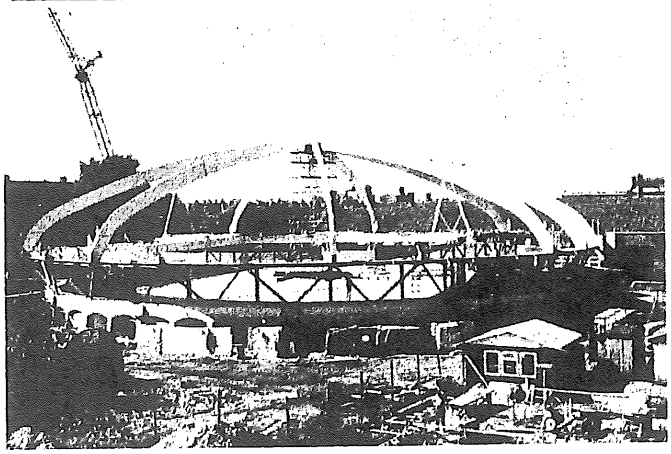
1. INLEIDING

Een constructie samengesteld uit twee kolommen en een balk noemen we een portaal of ook wel portaalspant.
In zo'n portaal is de verbinding tussen balk en kolommen volledig in staat om momenten, dwars- en normaalkrachten over te brengen.

Deze spanten kunnen zowel statisch bepaald als statisch onbepaald worden ondersteund.

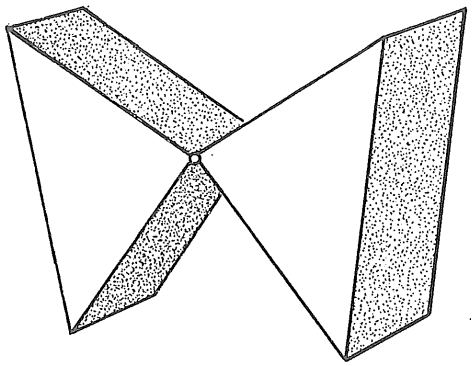
Een portaal wordt veelal ontworpen als een statisch onbepaalde constructie.

Een bijzondere vorm van een portaalspant is een driescharnierspant.
Als statisch bepaalde constructie is het driescharnierspant de meest gebruikelijke constructie. Bij deze spanten kan de balk ook een geknikte vorm hebben. Soms worden balk en kolom zelfs samengesmolten tot één gebogen vorm. We spreken in dit geval van driescharnierboogspanten.



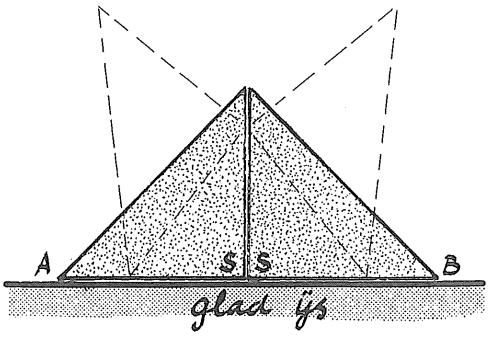
Sporthal Amsterdam-Oost arch: M. Kamerling 1974
-gebouwd op de fundering van een gashouder-

Portalen of portaalspanten worden veel toegepast als onderdeel van de draagconstructie van een bouwwerk, in het bijzonder wanneer het gaat om een laagbouwconstructie.

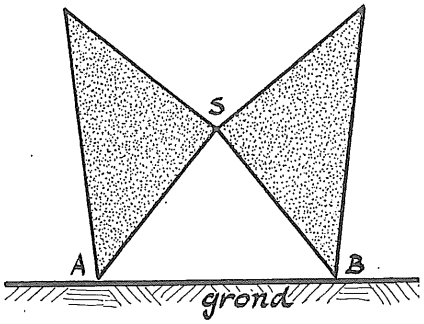


2. BLOKKENCONSTRUCTIE

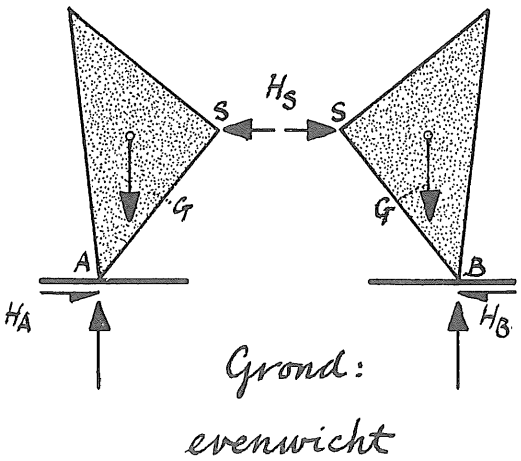
Een bijzondere vorm van een portaalspant is een driescharnierspant. Zo'n spant heeft een eenvoudig evenwichtssysteem. We kunnen dit aantonen door twee prismatische blokken te nemen, van gelijke vorm. Het is dus een symmetrische constructie.



Plaatsen we de blokken tegen elkaar op zuiver glad (wrijvingsloos) ijs dan zullen we zien dat de "constructie" in elkaar valt, omdat er in A en B geen horizontale reactiekrachten kunnen worden geleverd.



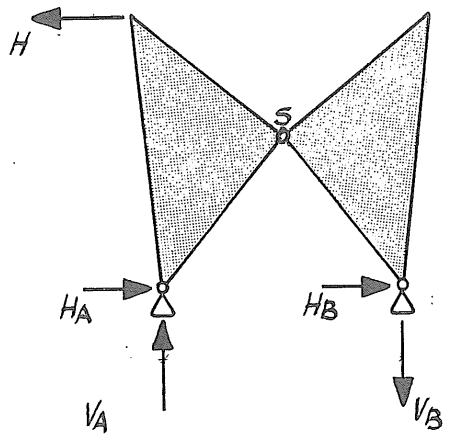
Worden de blokken op de grond geplaatst en nemen we aan dat deze grond in staat is voldoende wrijving in de steunpunten te leveren, dan blijft de blokkenconstructie overeind staan.
In A en B ontstaan dan de horizontale reactiekrachten H_A en H_B. Deze zijn gelijk en tegengesteld gericht omdat er uitwendig geen horizontale krachten op de constructie werken.



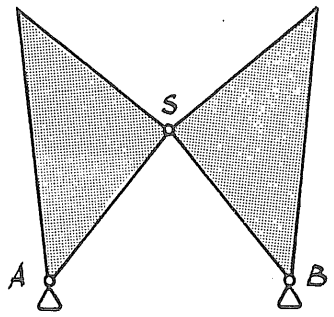
De verticale reactiekrachten zijn:

$V_A = V_B = G$

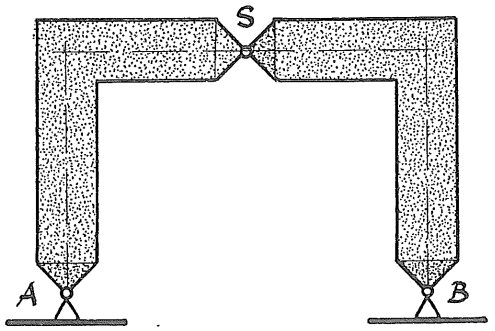
Uit het horizontale evenwicht van de afzonderlijke delen volgt dat in S een horizontale scharnierkracht $H_S = H_A = H_B$ moet werken.



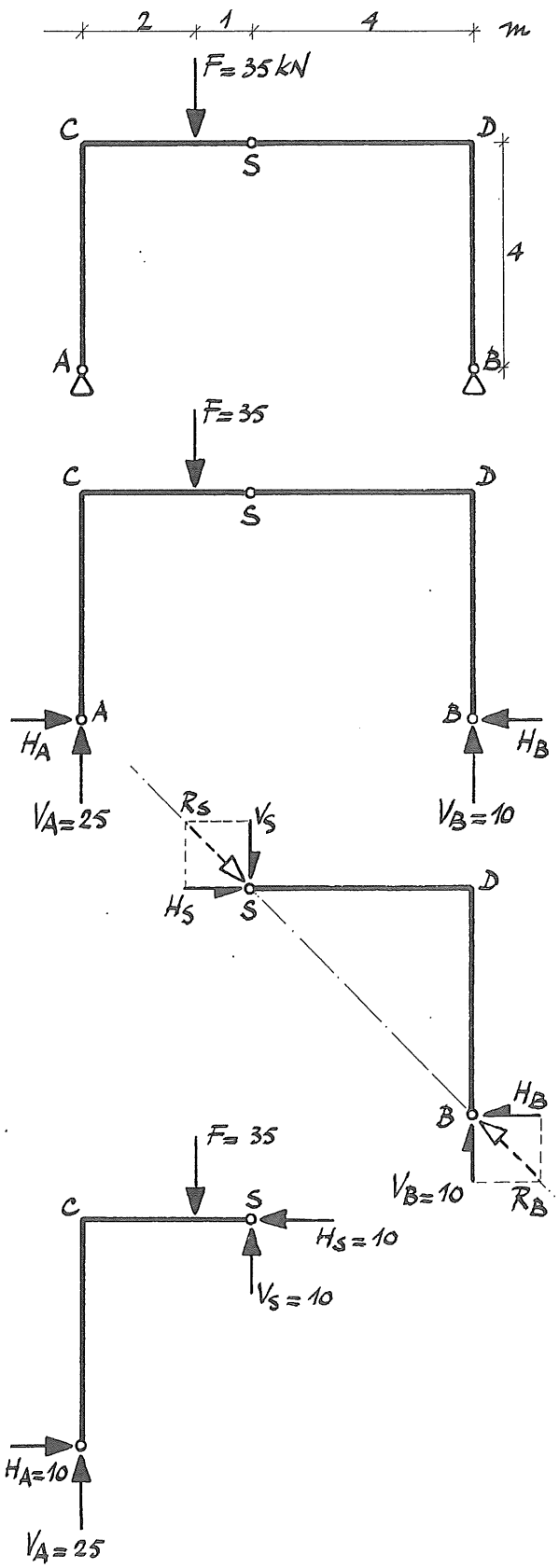
Laten we op de blokkenconstructie een horizontale kracht H aangrijpen dan zal er in punt S een schuin gerichte scharnierkracht optreden. Ga dit eens na.



Willen we een goede blokkenconstructie maken dan moeten we <u>drie</u> scharnieren aanbrengen, namelijk in A, B en S. Deze verbindingen zijn in staat zowel horizontale als verticale krachten over te brengen.



Vervangen we de twee blokken door twee L-vormige elementen dan ontstaat een constructie die we <u>driescharnierspant</u> noemen. Zo'n spant is een statisch bepaalde constructie. We hebben weliswaar in de twee scharnieropleggingen vier onbekende oplegreacties (H_A, V_A, H_B en V_B), maar we hebben ook vier vergelijkingen waaruit de grootte van deze reacties kan worden berekend. Deze vergelijkingen volgen uit de drie evenwichtsvoorwaarden en de voorwaarde dat het moment ter plaatse van het scharnier S gelijk moet zijn aan nul.



3. DRIESCHARNIERSPANTEN

Voorbeeld 1

Een driescharnierspant ACDB belast door een verticale kracht F = 35 kN.

We bepalen de grootte van de oplegreacties in A en B met behulp van de evenwichtsvoorwaarden.

Op de totale constructie van het spant werken de krachten F, H_A, V_A, H_B en V_B.

Voor het evenwicht geldt:

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A - H_B = 0 \qquad \rightarrow H_A = H_B$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow F \,.\, 2 - V_B \,.\, 7 = 0$

$35 \,.\, 2 - V_B \,.\, 7 = 0 \rightarrow V_B = 10$ kN

$\Sigma V = 0 \quad V_A + V_B - F = 0$

$V_A + 10 - 35 = 0 \rightarrow V_A = 25$ kN

Op de <u>onbelaste</u> rechterhelft BDS van het spant werken de krachten H_B, V_B, H_S en V_S.

Uit $\Sigma V = 0$ volgt direct: $V_S = V_B = 10$ kN.

Uit $\Sigma M_S = 0$ volgt:

$H_B \,.\, 4 - V_B \,.\, 4 = 0 \quad \rightarrow \quad H_B = V_B = 10$ kN.

Uit $\Sigma H = 0$ volgt dan: $\quad H_S = H_B = 10$ kN.

Uit het totale evenwicht hebben we al afgeleid dat $H_A = H_B$. Dus $H_A = 10$ kN.

We hadden de grootte van kracht H_B ook kunnen bepalen uit de voorwaarde dat de werklijn van de totale oplegreactie R_B in steunpunt B door het scharnier in S moet gaan.

We vinden dan:

$H_B = \frac{4}{4} \,.\, V_B = V_B = 10$ kN.

Op de belaste linkerhelft ACS van het spant werken de krachten F = 35 kN, H_A = 10 kN, V_A = 25 kN, H_S = 10 kN en V_S = 10 kN.

Controleren we het evenwicht van deze helft dan vinden we:

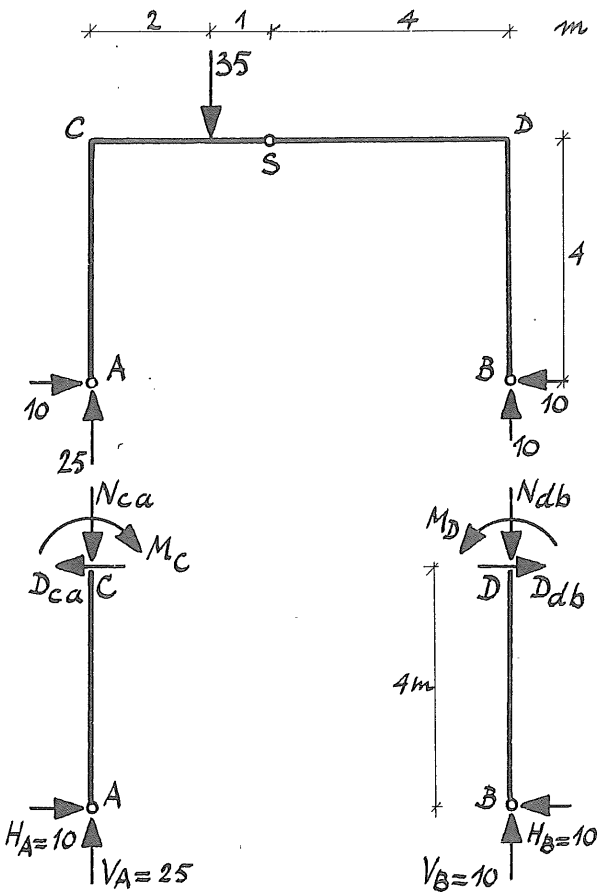
$\Sigma H = H_A - H_S = 10 - 10 = 0$

$\Sigma V = V_A + V_S - F = 25 + 10 - 35 = 0$

$\Sigma M_S = V_A \,.\, 3 - H_A \,.\, 4 - F \,.\, 1 =$

$= 25 \,.\, 3 - 10 \,.\, 4 - 35 \,.\, 1 = 0$

Ook de linkerhelft is dus in evenwicht.



De grootte van alle oplegreacties en de componenten van de kracht in het scharnier S zijn nu bekend. Met behulp van deze gegevens kunnen we voor het spant de M-, D- en N-lijn bepalen. We snijden daartoe het spant in C en D door en bekijken het evenwicht van de stijlen AC en BD en regel CD afzonderlijk.

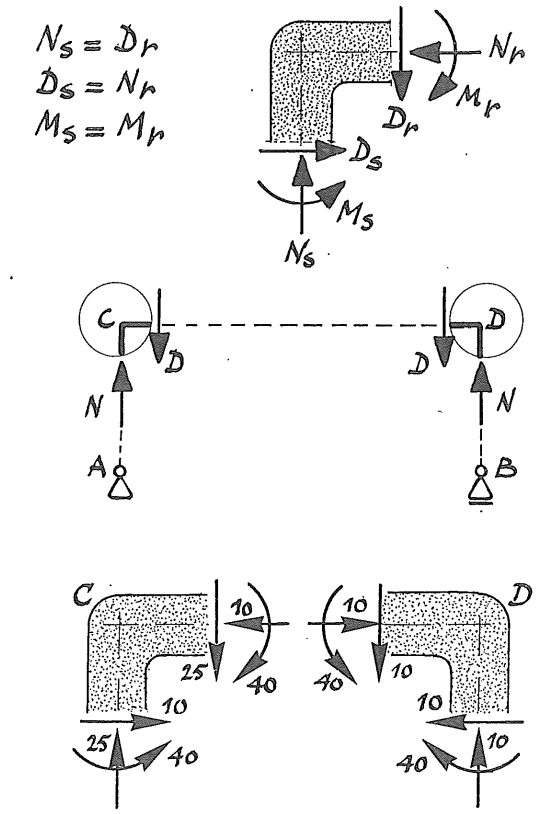
Voor stijl AC geldt:

$N_{AC} = V_A = 25$ kN $\qquad N_{CA} = V_A = 25$ kN
$D_{AC} = H_A = 10$ kN $\qquad D_{CA} = H_A = 10$ kN
$M_A = 0 \qquad M_C = H_A \cdot 4 = 40$ kNm

Voor stijl BD geldt:

$N_{BD} = V_B = 10$ kN $\qquad N_{DB} = V_B = 10$ kN
$D_{BD} = H_B = 10$ kN $\qquad D_{DB} = H_B = 10$ kN
$M_B = 0 \qquad M_D = H_B \cdot 4 = 40$ kNm

(met N_{AC} bedoelen we de normaalkracht in stijl AC in het punt A; N_{CA} is dan de normaalkracht in stijl AC in het punt C; evenzo is D_{AC} de dwarskracht in A en D_{CA} de dwarskracht in C; we schrijven echter niet M_{CA} omdat voor hoekpunt C geldt dat $M_{CA} = M_{CD} = M_C$).

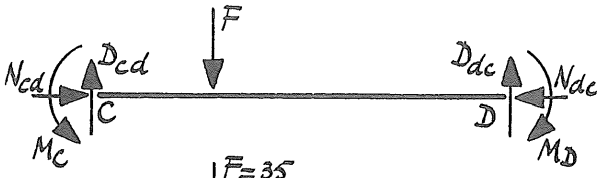


Beschouwen we het evenwicht van een afgesneden deel rondom een hoekpunt van de constructie dan zien we dat:

- de normaalkracht in de stijl (N_s) even groot moet zijn als de dwarskracht in de regel (D_r)
- de dwarskracht in de stijl (D_s) even groot moet zijn als de normaalkracht in de regel (N_r)
- het moment in de stijl (M_s) even groot moet zijn als het moment in de regel (M_r)

Dit geldt altijd als stijl en regel loodrecht op elkaar staan en bovendien in het hoekpunt geen uitwendige krachten aangrijpen.

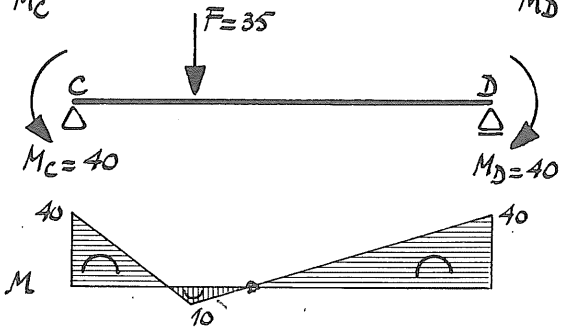
N.B.
De krachten die door de staafeinden worden uitgeoefend op het hoekpunt zijn gelijk en tegengesteld aan de krachten die door het hoekpunt worden uitgeoefend op de staafeinden.



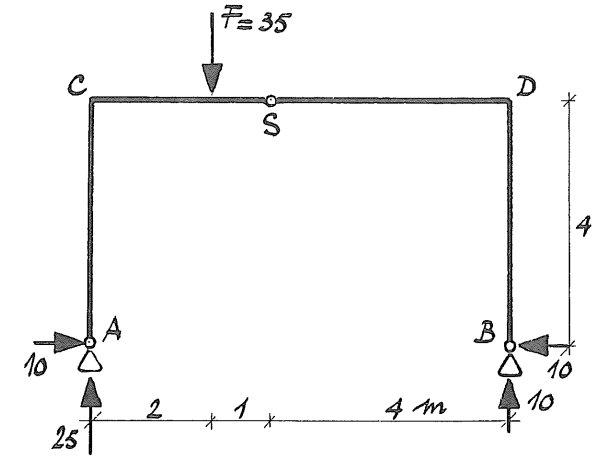
Voor regel CD geldt:

$N_{CD} = D_{CA} = 10$ kN; $N_{DC} = D_{DB} = 10$ kN

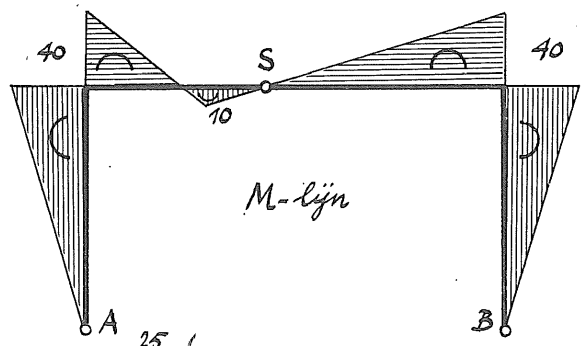
$D_{CD} = N_{CA} = 25$ kN; $D_{DC} = N_{DB} = 10$ kN



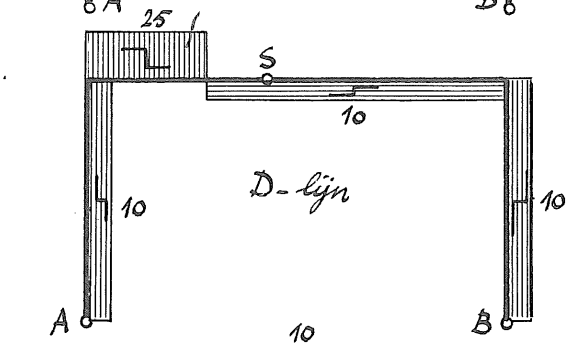
Voor het bepalen van de M-lijn voor regel CD kunnen we deze regel beschouwen als een ligger op twee steunpunten, belast door kracht F en de momenten M_C en M_D.
De M-lijn volgt dan uit een eenvoudige superpositie.



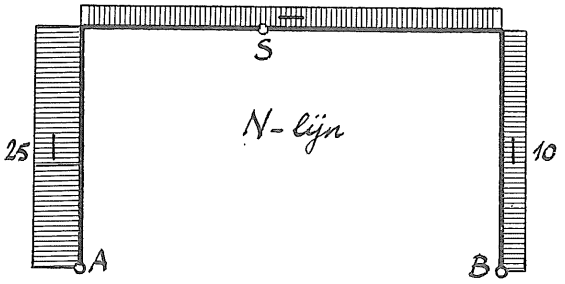
We kunnen nu de M-, D- en N-lijn voor het spant tekenen.



Het verloop van de M-lijn voor regel CD is reeds bepaald.
Het verloop van de M-lijn voor de stijlen AC en BD is rechtlijnig omdat op deze stijlen geen uitwendige krachten aangrijpen.

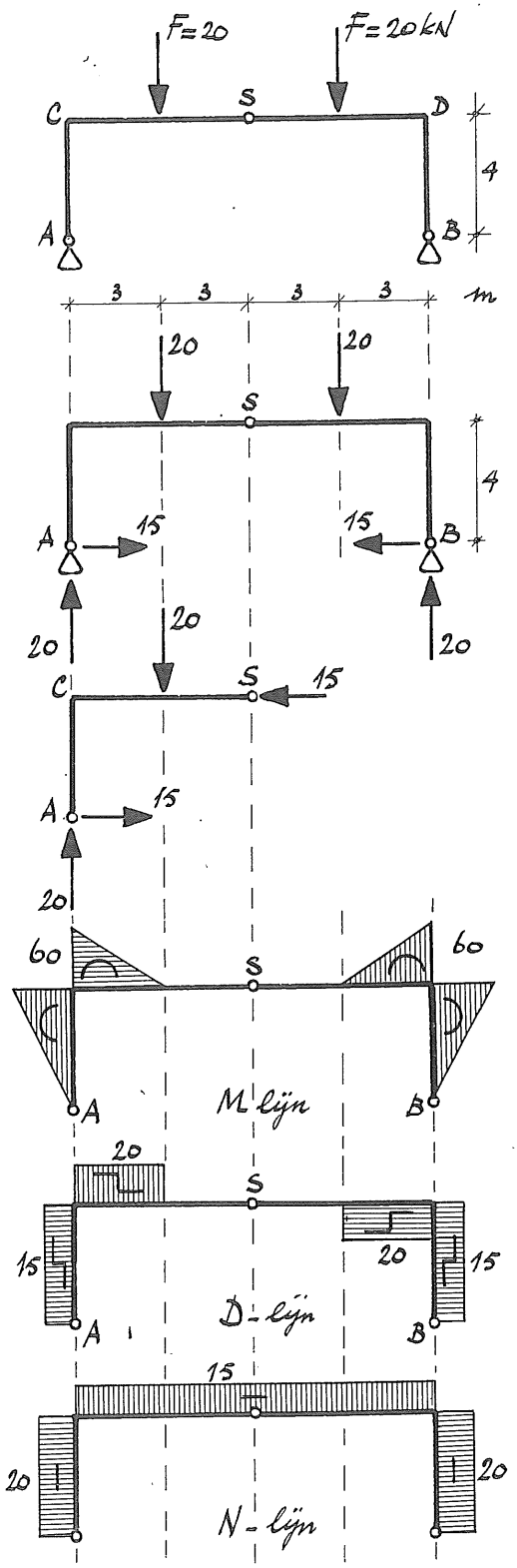


Het verloop van de D-lijn wordt niet beïnvloed door het scharnier in S. Een scharnier kan immers een verticale kracht overbrengen.



Het verloop van de N-lijn wordt evenmin beïnvloed door het scharnier in S; een scharnier kan een horizontale kracht overbrengen.

We hebben in het voorgaande de krachtsverdeling in een driescharnierspant bepaald uitgaande van de evenwichtsvoorwaarden $\Sigma H = 0$, $\Sigma V = 0$ en $\Sigma M = 0$.
Met behulp van deze voorwaarden hebben we eerst de grootte van de oplegreacties bepaald. Daarna volgt uit het evenwicht van de afzonderlijke delen van het spant de M-, D- en N-lijn voor het spant.



Voorbeeld 2

Een driescharnierspant ACDB wordt belast door twee gelijke verticale krachten $F = 20$ kN.

We merken op dat de constructie van het spant en de belasting van het spant symmetrisch zijn.
Dan geldt voor de verticale reactiekrachten in A en B:
$V_A = V_B = F = 20$ kN.

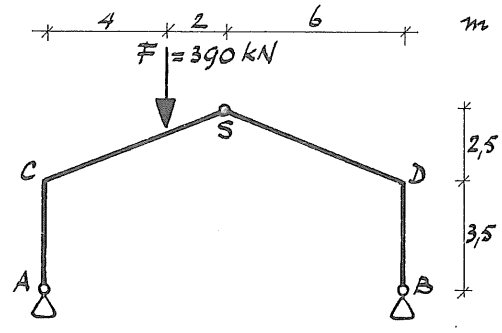
Beschouwen we de linkerhelft ACS van het spant dan vinden we voor het moment ten opzichte van S:

$$\Sigma M_S = 0 \rightarrow V_A \,.\, 6 - H_A \,.\, 4 - F \,.\, 3 = 0$$
$$20 \,.\, 6 - H_A \,.\, 4 - 20 \,.\, 3 = 0$$
$$\rightarrow H_A = 15 \text{ kN}$$

Dan is ook (symmetrie) $H_B = 15$ kN

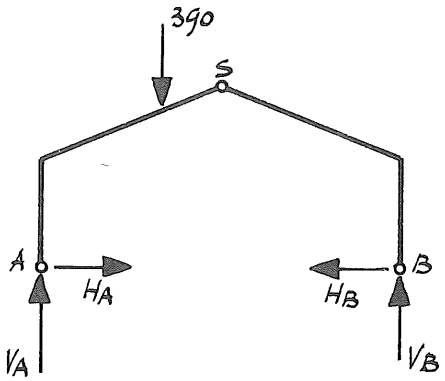
De krachten in het scharnier S zijn:
$V_S = 0$ (symmetrie); of $V_S = V_A - F = 0$
$H_S = H_A = 15$ kN.

We geven nu zonder verdere uitleg de M-, D- en N-lijn.
De M-lijn voor regel CD is bepaald door deze regel te beschouwen als een ligger op twee steunpunten, aan de einden belast door een moment $M = 60$ kNm en verder door de krachten F.
Het is echter ook mogelijk om de M-lijn voor regel CD te bepalen vanuit het midden S. Omdat $V_S = 0$ volgt voor het moment in het regeldeel tussen de twee krachten F direct dat dit moment gelijk moet zijn aan nul.



Voorbeeld 3

Een driescharnierspant wordt belast door een verticale kracht F = 390 kN.



Op het spant werken de reactiekrachten H_A, H_B, V_A en V_B.
Uit de evenwichtsvoorwaarden voor het totale spant volgt:

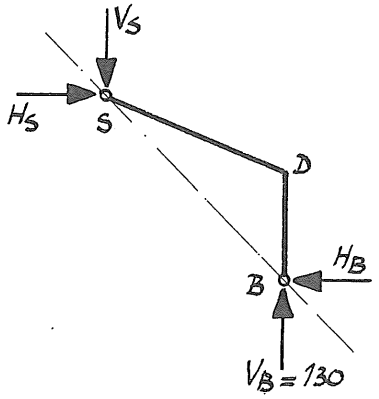
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot 12 - F \cdot 8 = 0$

$V_A \cdot 12 - 390 \cdot 8 = 0 \rightarrow V_A = 260$ kN

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_B - F = 0$

$260 + V_B - 390 = 0 \rightarrow V_B = 130$ kN

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A - H_B = 0$



Op de onbelaste rechterhelft BDS werken de krachten H_B, V_B, H_S en V_S.

Hiervoor geldt:

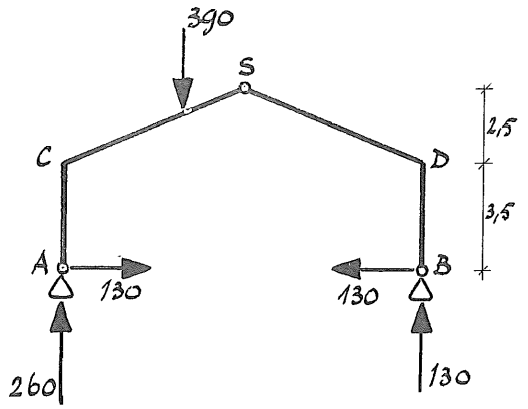
$\Sigma M_S = 0 \rightarrow H_B \cdot 6 - V_B \cdot 6 = 0$

$\rightarrow H_B = V_B = 130$ kN

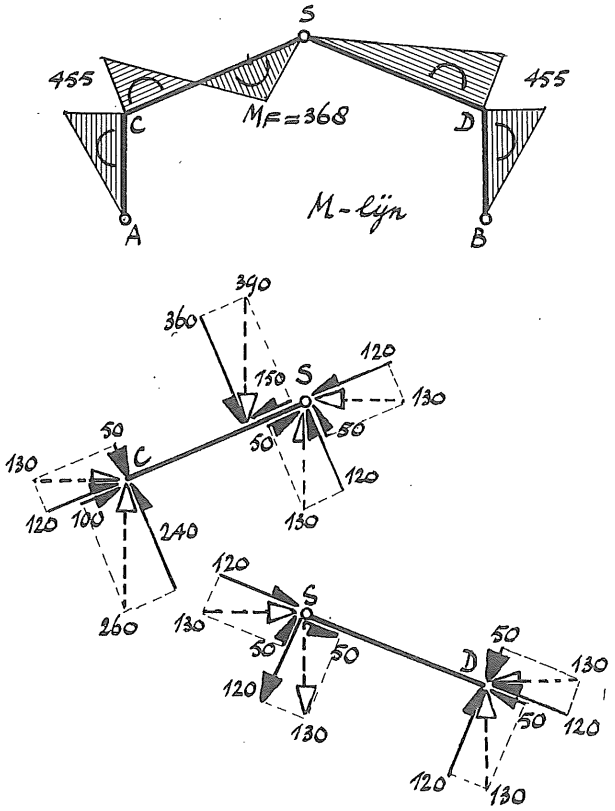
Uit $H_A - H_B = 0$ volgt dan: $H_A = 130$ kN

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_B - V_S = 0 \rightarrow V_S = 130$ kN

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_B - H_S = 0 \rightarrow H_S = 130$ kN



Met behulp van de gevonden waarden van de oplegreacties kunnen we de M-, D- en N-lijn voor het spant bepalen.



Voor de M-lijn geldt:

stijl BD: $M_B = 0$

$M_D = H_B \cdot 3{,}5 = 130 \cdot 3{,}5 =$

$= 455$ kNm

regel DS: $M_D = 455$ kNm

$M_S = 0$

stijl AC: $M_A = 0$

$M_C = H_A \cdot 3{,}5 = 130 \cdot 3{,}5 =$

$= 455$ kNm

regel CS: $M_C = 455$ kNm

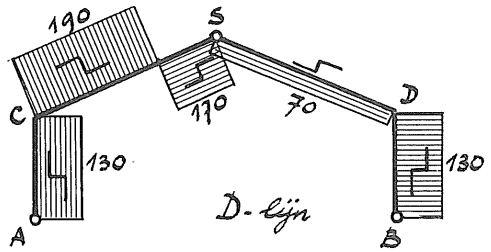
$M_F = V_A \cdot 4 - H_A \left(3{,}5 + \frac{2}{3} \cdot 2{,}5\right)$

$= 260 \cdot 4 - 130 \cdot 5{,}17 =$

$= 368{,}5$ kNm

$M_S = 0$

Voor het bepalen van de D- en N-lijn moeten we voor de regels CS en DS de horizontale en verticale krachten ontbinden in twee richtingen, langs en loodrecht op de regels.



Voor de D-lijn geldt dan:

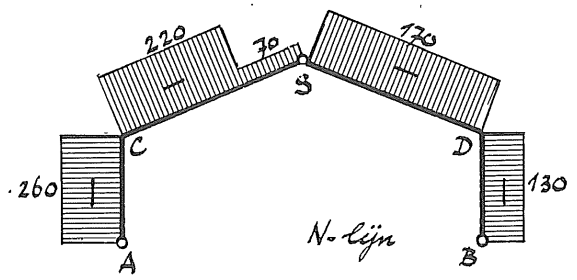
stijl AC: D = 130 kN

regel CS: deel CF: D = 240 - 50 = 190 kN

deel FS: D = 120 + 50 = 170 kN

regel DS: D = 120 - 50 = 70 kN

stijl BD: D = 130 kN



Voor de N-lijn geldt:

stijl AC: N = 260 kN (druk)

regel CS: deel CF: N = 120 + 100 =

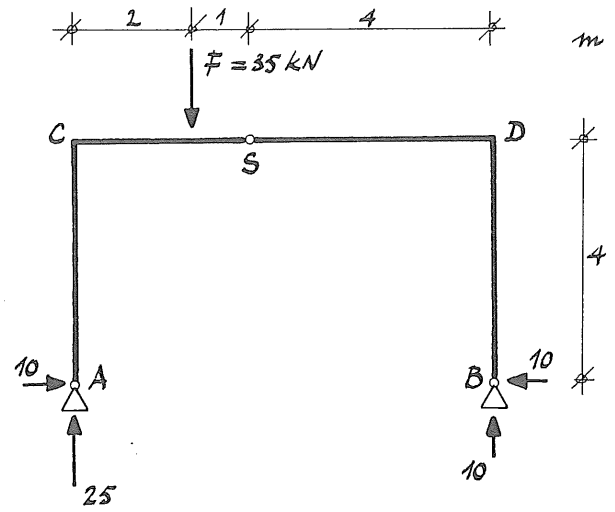
= 220 kN (druk)

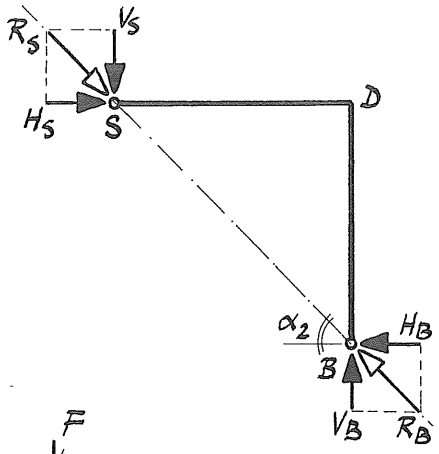
deel FS: N = 120 - 50 =

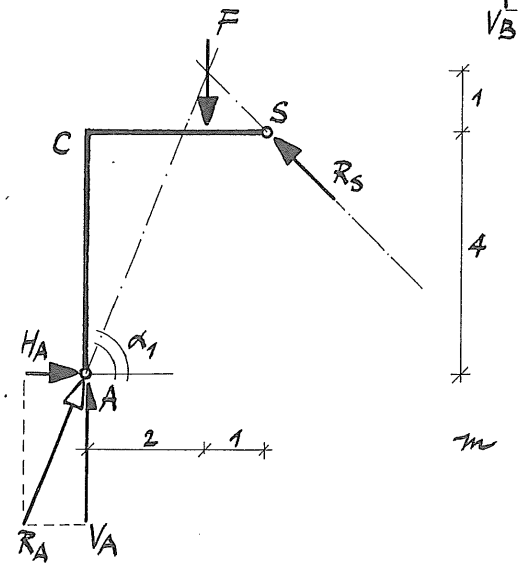
= 70 kN (druk)

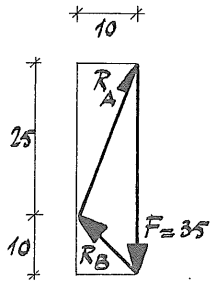
regel DS: N = 120 + 50 = 170 kN (druk)

stijl BD: N = 130 kN (druk)









4. DRUKLIJN

Als voorbeeld beschouwen we het driescharnierspant ACDB, in S voorzien van een scharnier en belast door een verticale kracht F = 35 kN.

Dit voorbeeld is hiervoor reeds uitgewerkt, waarbij de oplegreacties zijn bepaald met behulp van de evenwichtsvoorwaarden.

We beschouwen het rechterdeel BDS van het spant.

Op dit deel werken de krachten

- R_B in scharnier B
  (componenten V_B en H_B)
- R_S in scharnier S
  (componenten V_S en H_S)

Als deel BDS in evenwicht is dan zullen de werklijnen van de krachten R_B en R_S moeten samenvallen. Verder geldt: $R_B = R_S$.

De grootte van de verticale component V_B van R_B volgt uit de evenwichtsvoorwaarde

$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = 10$ kN

Omdat hoek $\alpha_2 = 45^o$ is:

$H_B = V_B = 10$ kN; $\quad R_B = R_S = 10\sqrt{2}$ kN

Beschouwen we nu het linkerdeel ACS van het spant. Op dit deel werken de krachten

- R_A in scharnier A
  (componenten V_A en H_A)
- R_S in scharnier S
- F

Als deel ACS in evenwicht is dan moeten de werklijnen van de krachten R_A, R_S en F door één punt gaan. Met deze voorwaarde ligt de richting van de werklijn van R_A vast.

De grootte van de verticale component V_A van R_A volgt uit de evenwichtsvoorwaarde

$\Sigma M_B = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = 25$ kN

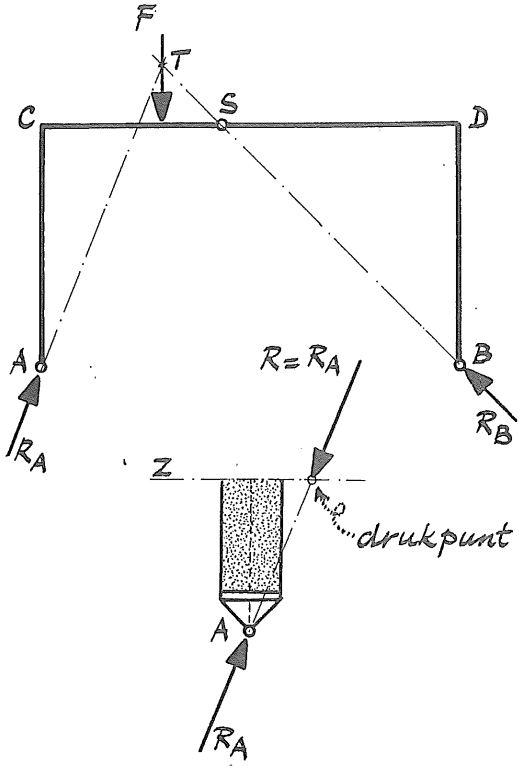
Omdat $tg\alpha_1 = \frac{5}{2}$ is:

$H_A = \frac{2}{5} \cdot 25 = 10$ kN

Dan is $\quad R_A = 5\sqrt{29}$ kN

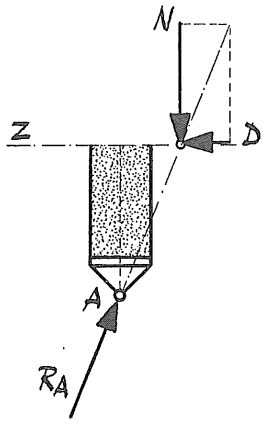
Opmerking

We kunnen natuurlijk ook gebruik maken van een krachtendriehoek.

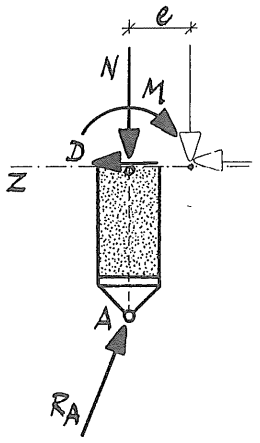


Beschouwen we tenslotte het gehele spant dan volgt uit het voorgaande direct dat de werklijnen van de krachten R_A, R_B en F door één punt (T) moeten gaan.
De grootte van deze krachten wordt dus bepaald door driehoek ATB.

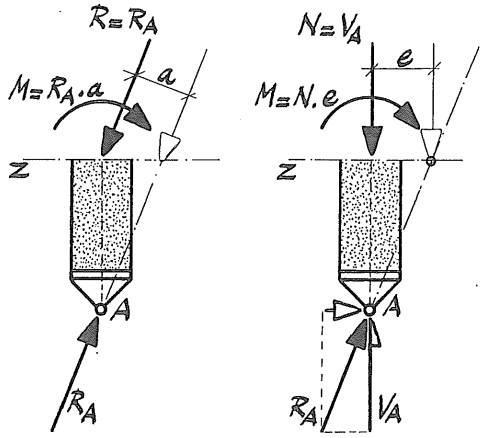
Bekijken we nu eens een gedeelte AZ van stijl AC.
In de snede bij Z moet een kracht R werken die op de werklijn van R_A ligt, even groot is als R_A, maar tegengesteld gericht.
Het aangrijpingspunt van kracht R in de snede bij Z noemen we het <u>drukpunt</u>. Dit punt kan zowel in als buiten de eigenlijke doorsnede vallen; hier valt het drukpunt erbuiten.
Omdat de krachten R en R_A dezelfde werklijn hebben is het gedeelte AZ van stijl AC in evenwicht.



Kracht R kunnen we ontbinden in een component D in het vlak van de doorsnede en een component N loodrecht op het vlak van deze snede.

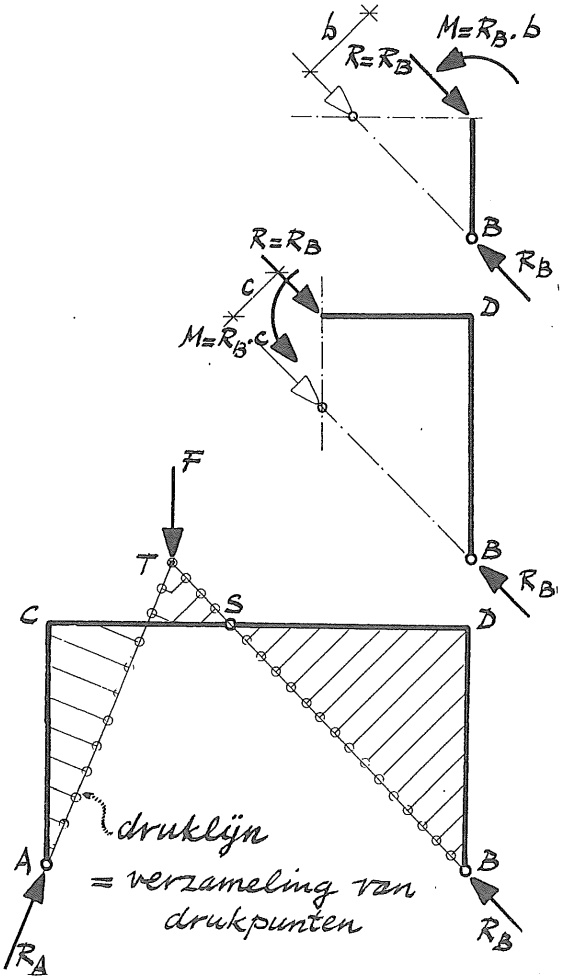


De component D in het vlak van de snede kunnen we zonder meer langs zijn werklijn verplaatsen naar de doorsnede.
Kracht D is dan de dwarskracht die in deze doorsnede werkt.
De component N loodrecht op het vlak van de snede kunnen we evenwijdig aan zichzelf verplaatsen naar het zwaartepunt van de doorsnede. Kracht N is dan de normaalkracht die in deze doorsnede werkt.
Een kracht mag echter niet zonder meer evenwijdig aan zichzelf worden verplaatst, er ontstaat daardoor een moment M. Dit moment M is het buigend moment dat in de doorsnede werkt.



De grootte van het moment M wordt voor alle doorsneden van stijl AC bepaald door de grootte van kracht R_A en de afstand tussen de werklijnen van R_A en R.
Dus: $M = R_A \cdot a$
Deze grootte wordt ook bepaald door de grootte van kracht N en de afstand waarover deze kracht wordt verplaatst. Omdat $N = V_A$ is dus:
$M = V_A \cdot e = R_A \cdot a$

We noemen de verzameling van de drukpunten van de doorsneden van een element de druklijn.
Voor stijl AC valt dus de druklijn samen met de werklijn van R_A.
Het vlak gevormd door deze druklijn en de staafas van stijl AC is een soort momentenvlak voor stijl AC, immers $M = R_A \cdot a$. De schaal van dit vlak wordt bepaald door de grootte van R_A.

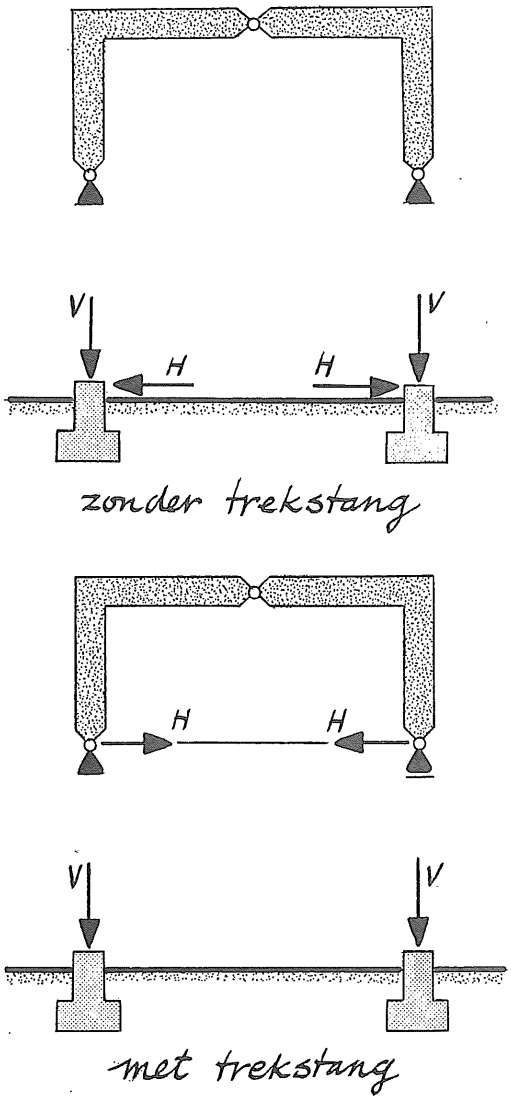


Op geheel dezelfde wijze kunnen we afleiden dat de druklijn voor stijl BD samenvalt met de werklijn van R_B. Het vlak gevormd door deze druklijn en de staafas van stijl BD is ook weer een soort momentenvlak voor stijl BD, want $M = R_B \cdot b$. De schaal van dit vlak is echter anders, deze wordt nu immers bepaald door de grootte van kracht R_B.

Ook voor regel CD geldt hetzelfde zoals uit de figuur duidelijk wordt.
Dan is: $M = R_B \cdot c$.

De druklijn voor het gehele spant komt dus overeen met de opstaande zijden van de eerder gevonden driehoek ATB. Het gearceerde deel geeft een soort momentenlijn voor de twee takken van de druklijn.

Uit het voorgaande wordt wel duidelijk dat het zinvol is om er bij het ontwerpen voor te zorgen dat de vorm van het spant zoveel mogelijk de druklijn volgt; in dat geval zijn de buigende momenten in de doorsneden zo klein mogelijk. We moeten de druklijn dan wel bepalen voor het maatgevende belastinggeval.



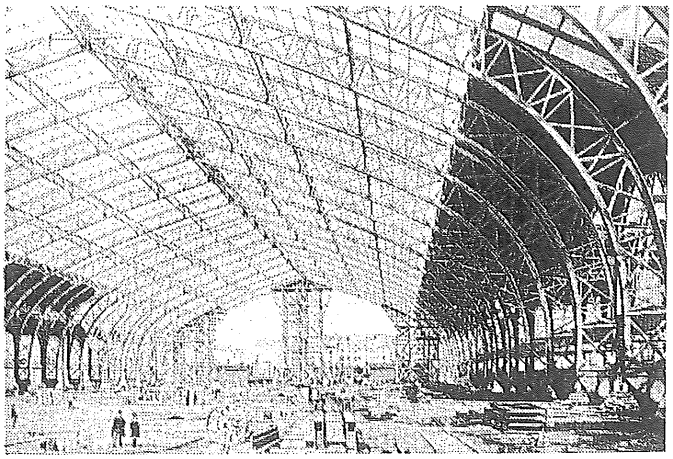
Trekstang

Het maakt voor de krachtsverdeling (M-, D- en N-lijn) in spant ACDB geen verschil of

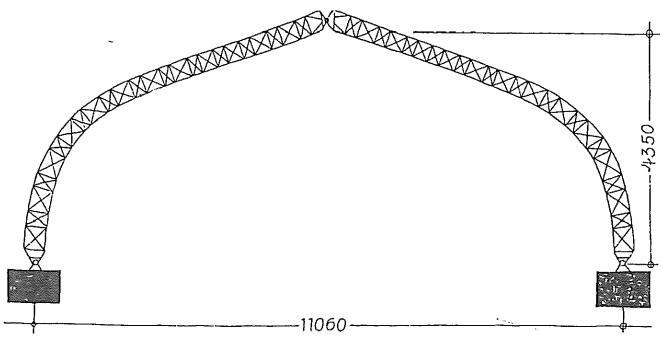
- in de steunpunten A en B een scharnier is aangebracht
- in steunpunt A een scharnier en in steunpunt B een rol is aangebracht met tussen deze steunpunten een verbindingsstaaf

Het maakt voor de fundering echter wel degelijk verschil.
Indien in de steunpunten twee scharnieren zijn aangebracht dan zal op de fundering behalve een verticale ook een horizontale actiekracht worden uitgeoefend. Deze kracht moet door de fundering worden opgenomen en worden overgebracht naar de aardkorst.

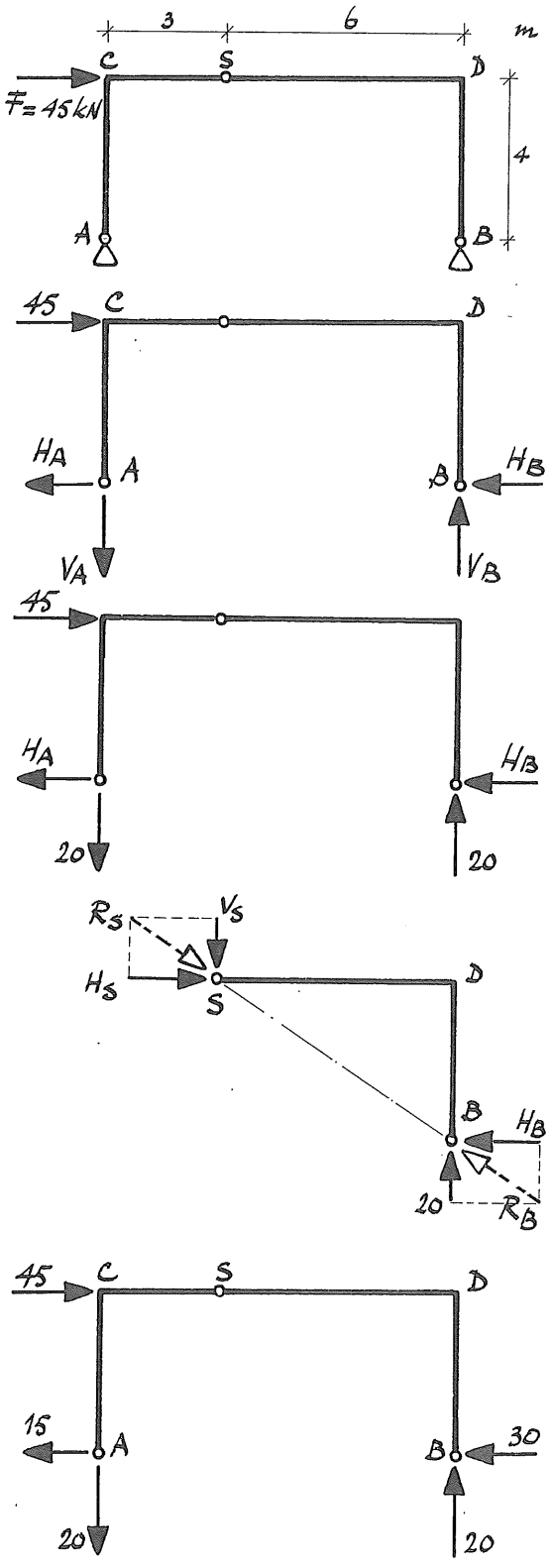
Indien de steunpunten worden verbonden door een staaf, dan wordt deze horizontale kracht opgenomen door deze staaf.
De fundering krijgt in dit geval alleen een verticale actiekracht over te brengen naar de aardkorst.
Omdat in de staaf een trekkracht optreedt noemen we deze staaf meestal trekstang.
Zo'n trekstang kan in de praktijk goede diensten bewijzen.



Parijs, Wereldtentoonstelling 1889 *Machinehal*



Schema



Horizontale krachten

We beschouwen een driescharnierspant ACDB, in S voorzien van een scharnier belast door een horizontale kracht F = 45 kN.

De grootte van de oplegracties in A en B kunnen we bepalen met behulp van de evenwichtsvoorwaarden.

Voor het totale spant geldt:

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A + H_B - F = 0$

$H_A + H_B = 45$ kN

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -V_A \cdot 9 + F \cdot 4 = 0$

$-V_A \cdot 9 + 45 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_A = 20$ kN

$\Sigma V = 0 \rightarrow -V_A + V_B = 0$

$-20 + V_B = 0 \rightarrow V_B = 20$ kN

Voor het bepalen van de grootte van kracht H_B bekijken we het rechterdeel BDS van het spant. We maken gebruik van het gegeven dat de werklijn van de totale oplegreactie R_B in B door het punt S zal moeten gaan. Dan is:

$H_B = \frac{6}{4} \cdot V_B = \frac{6}{4} \cdot 20 = 30$ kN

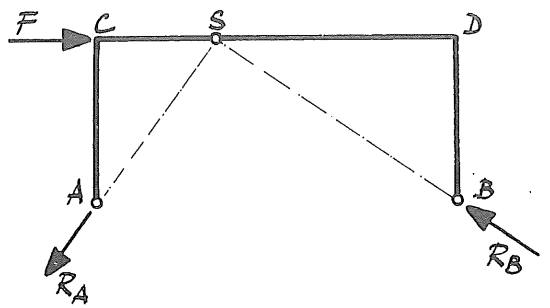
Voor de krachten in scharnier S vinden we:

$H_S = H_B = 30$ kN; $V_S = V_B = 20$ kN.

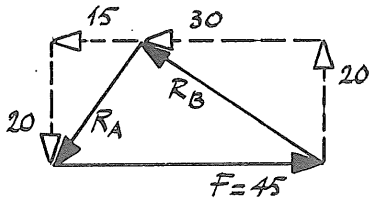
Uit $H_A + H_B = 45$ kN volgt:

$H_A = 45 - H_B = 45 - 30 = 15$ kN.

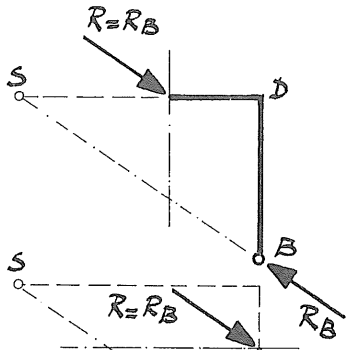
Alle oplegreacties zijn nu bekend. Met behulp van deze gegevens kunnen de M-, D- en N-lijn voor het spant worden getekend.



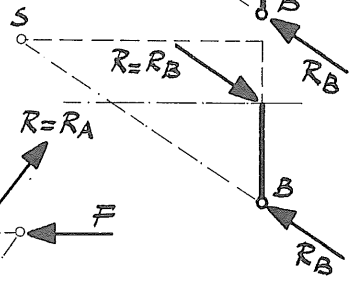
We beschouwen de krachten die op het spant werken nog eens.
Wil het spant in evenwicht zijn dan moeten de werklijnen van de krachten F, R_A en R_B door één punt gaan.
Van de krachten F en R_B is bekend dat hun werklijnen door het punt S gaan. Dit betekent dat ook de werklijn van R_A door het punt S zal moeten gaan.

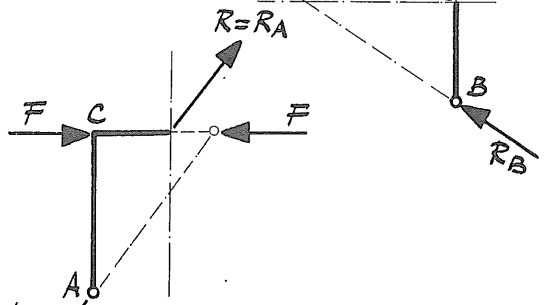


Omdat de krachten F, R_A en R_B met elkaar in evenwicht zijn vormen zij een gesloten krachtendriehoek. Met behulp van deze krachtendriehoek kunnen we ook de grootte van de oplegreacties bepalen, de richting van de werklijnen van R_A en R_B is immers bekend.



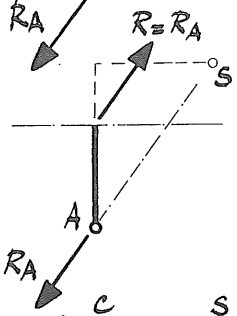
Het moment in een doorsnede van het gedeelte DS van de regel wordt bepaald door kracht R_B.



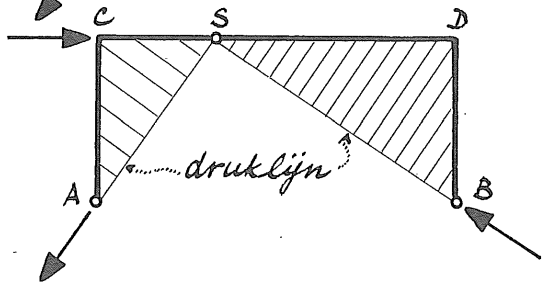


Hetzelfde geldt voor het moment in een snede van stijl BD.

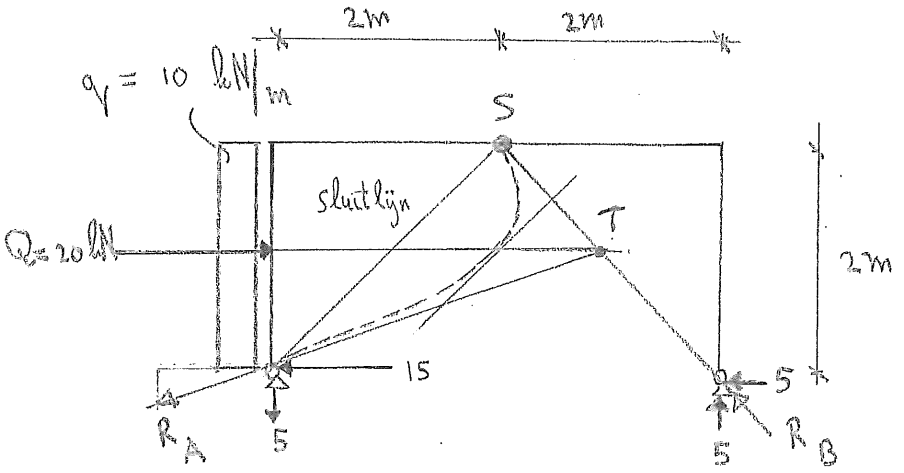
Evenzo wordt het moment in een doorsnede van het gedeelte CS van de regel bepaald door kracht R_A.



Dit geldt ook voor het moment in een snede van stijl AC.



Dit betekent dat de lijnen AS en BS de twee takken van de druklijn zijn. Met deze druklijn is tevens de vorm van het M-vlak voor het spant bepaald.
Door deze druklijn te bepalen kunnen we dus snel een inzicht verkrijgen in de krachtsverdeling in het spant.

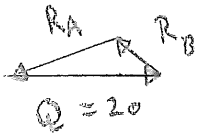


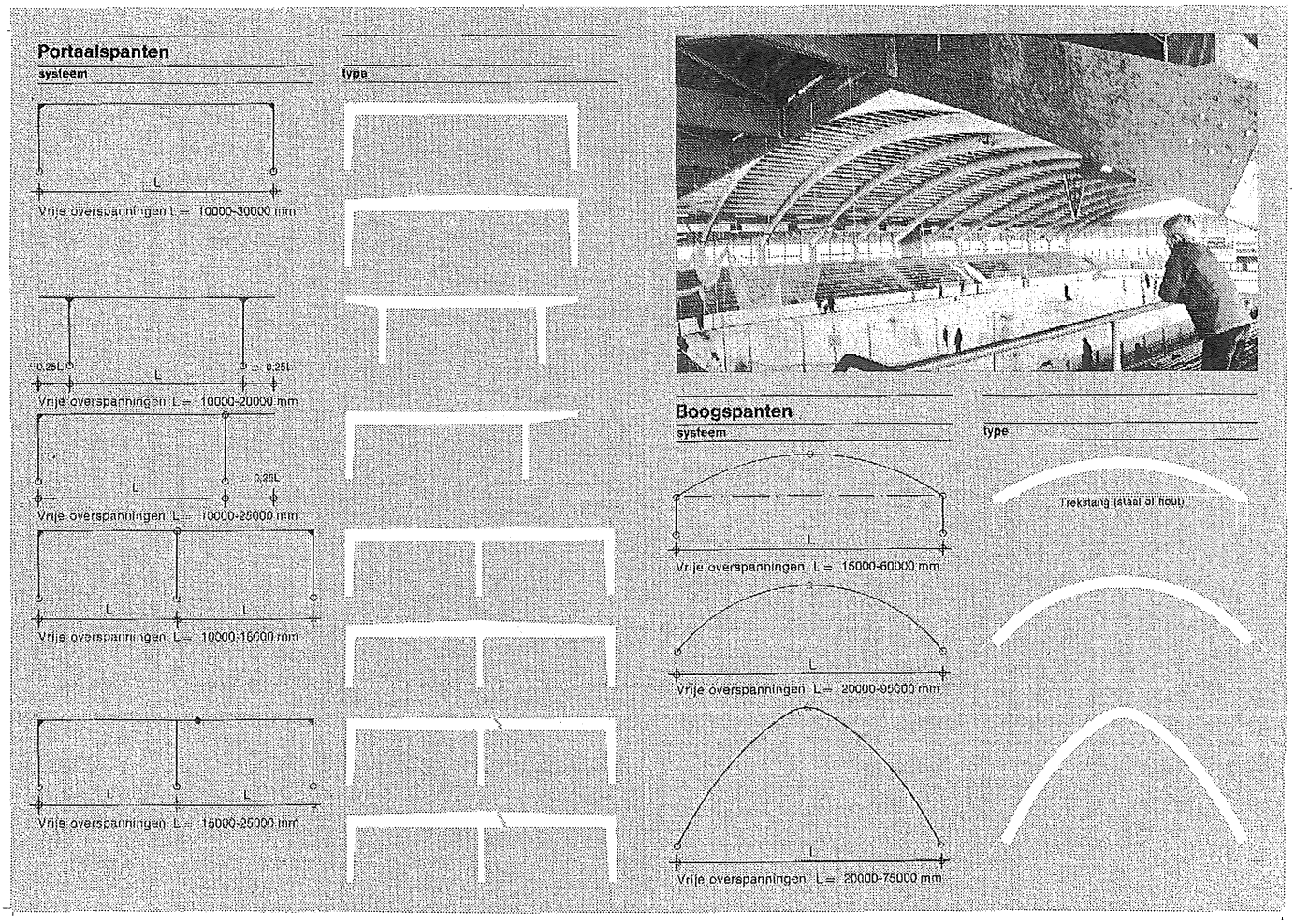
voor puntlast Q:

drukl-lijn: AT en STB

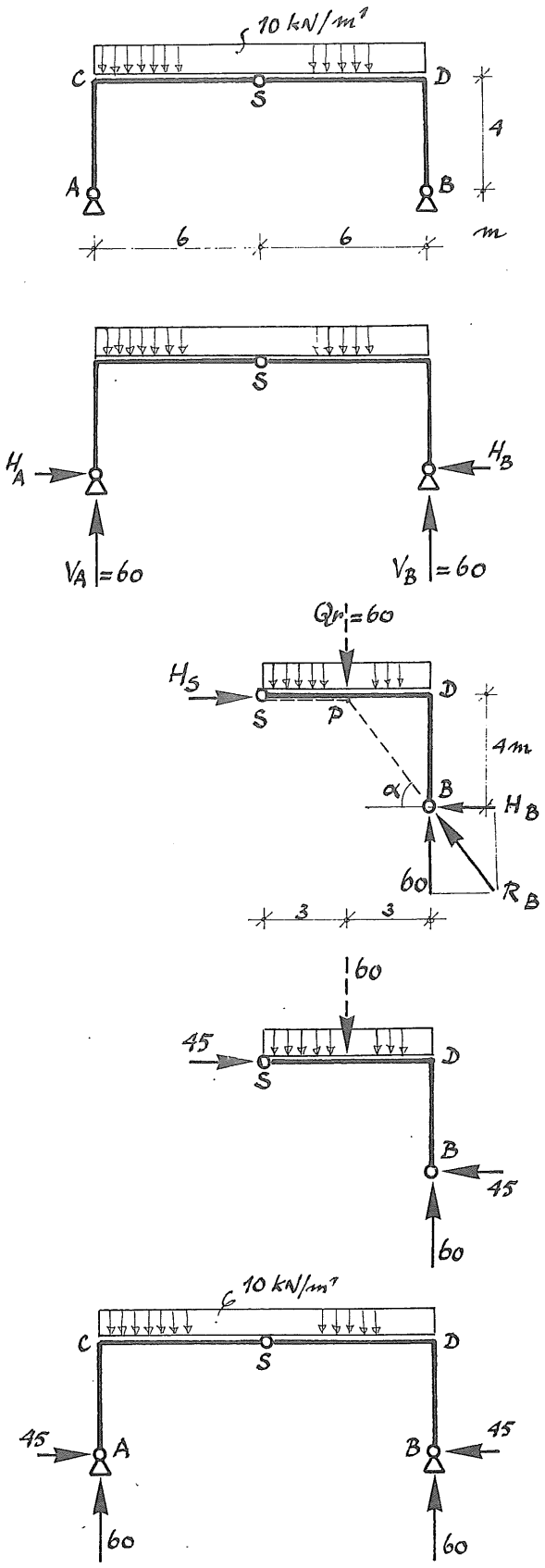
voor gelijkmatig verdeelde belasting q:

drukl lijn: - - - - -





Deel van het produktieprogram van een fabiek in gelamineerd hout



5. VOORBEELDEN

Voorbeeld 1

Een symmetrisch driescharnierspant ACDB wordt belast door een gelijkmatig verdeelde belasting $q = 10\ kN/m^1$.

We bepalen eerst de verticale oplegreacties V_A en V_B.
Uit de symmetrie volgt:
$V_A = V_B = \frac{120}{2} = 60\ kN$.

We beschouwen nu de rechterhelft BDS van het spant.
De resultante van de belasting op de rechterhelft is $Q_r = 10 \cdot 6 = 60\ kN$.
Uit $Q_r = V_B = 60\ kN$ volgt $V_S = 0$

Er werkt in S geen verticale scharnierkracht; alleen een horizontale kracht H_S.

We noemen de totale oplegreactie in B (de resultante van V_B en H_B): R_B.
Er werken op de rechterhelft BDS 3 krachten Q_r, R_B en H_S die met elkaar in evenwicht moeten zijn.
Hun werklijnen moeten daarom door één punt P gaan, het snijpunt van de werklijnen van Q_r en H_S.
De werklijn van R_B moet dus ook door P gaan.
Hiermee ligt de richting van deze werklijn vast.

$tg\ \alpha = \frac{4}{3}$

$H_B = \frac{3}{4} \cdot V_B = \frac{3}{4} \cdot 60 = 45\ kN$

$H_S = H_B = 45\ kN$

H_B is op deze wijze grafisch bepaald.

We hadden H_B ook analytisch kunnen bepalen.

$\Sigma M_S = 0$

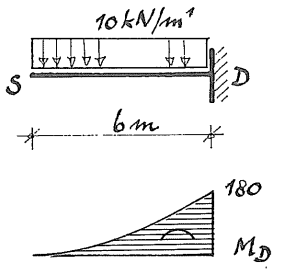
$+ Q_r \cdot 3 - V_B \cdot 6 + H_B \cdot 4 = 0$

$+ 60 \cdot 3 - 60 \cdot 6 + H_B \cdot 4 = 0$

$H_B \cdot 4 = 360 - 180 = 180$

$H_B = 45\ kN$

Uit $\Sigma H = 0$ volgt $H_A = H_B = 45\ kN$



We bepalen nu de M-lijnen voor het spant.

Stijl BD: $M_B = 0$

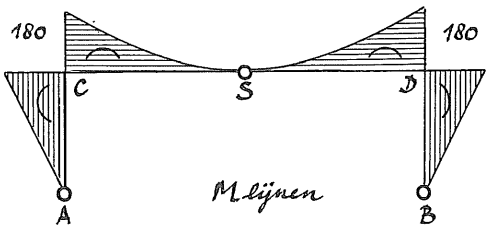
$M_D = H_B \cdot 4 = 45 \cdot 4 = 180$ kNm

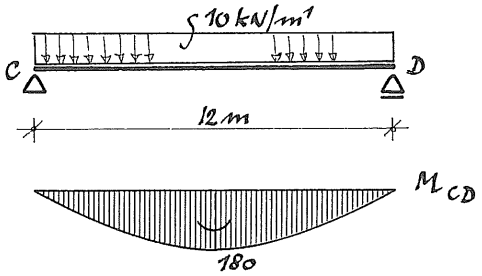
Regelgedeelte SD: $M_D = 180$ kNm

$M_S = 0$

De M-lijn van SD is gelijk aan die van een bij D ingeklemde balk met een belasting q.

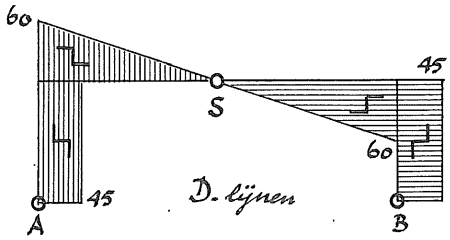
De M-lijnen zijn symmetrisch.



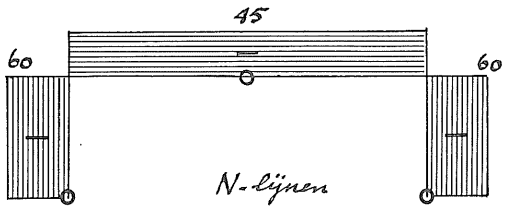


Merk op dat de grootste momenten ($M_C = M_D =$ $= 180$ kNm) in de bovenregel CD van dit driescharnierspant in absolute waarde even groot zijn als het grootste moment in een vrij opgelegde balk CD, waarvoor geldt:

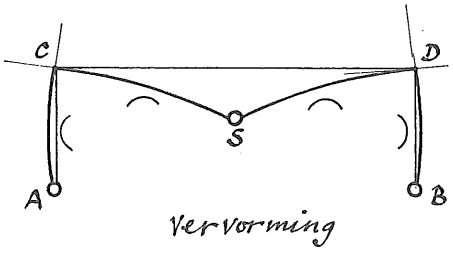
$$M_{max} = \frac{1}{8} q\ell^2 = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 12^2 = 180 \text{ kNm}$$



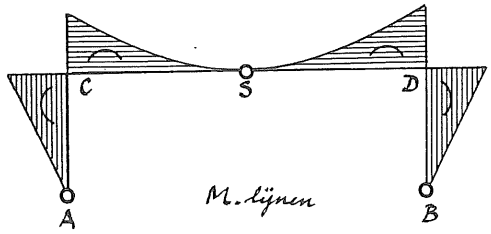
De D- en N-lijnen in de stijlen en bovenregel volgen uit de horizontale en verticale oplegreacties in A en B.



Vervorming

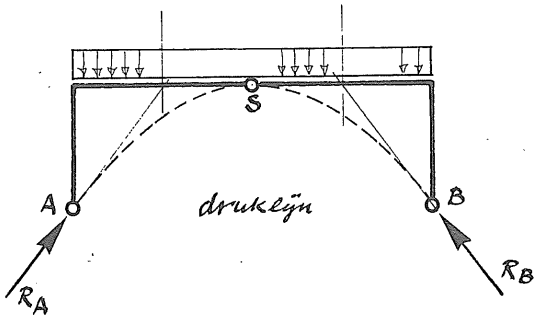


Hiernaast is de vervorming van het spant, die volgt uit de m-lijnen, overdreven getekend.
Als de bovenregel CD van het spant een dak draagt, dan zal het midden S hiervan een grote zakking vertonen. Daardoor ontstaan problemen met de hemelwaterafvoer.
Dat maakt een driescharnierspant van deze vorm minder geschikt als bouwconstructie.



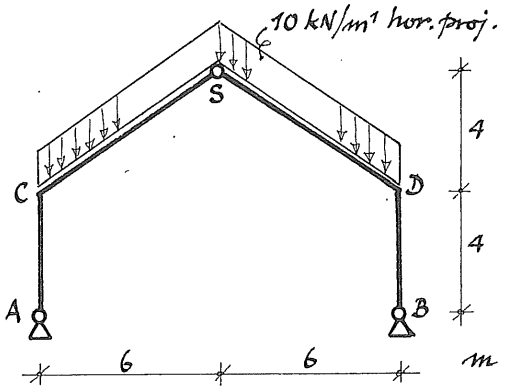
Druklijn

Uit het verloop van de M-lijn is de vorm van de druklijn af te leiden.
Waar M = 0 snijdt de druklijn de staafas; dit is het geval in A, B en S.
De werklijnen van R_A en R_B vormen de raaklijnen aan de druklijn in A en B.
In S loopt de raaklijn aan de druklijn horizontaal (horizontale scharnierkracht H_S)



De afstand van de druklijn tot de bovenregel CD is een maat voor de grootte van de momenten in CD. De druklijn heeft daarom, net als de M-lijn van CD, een parabolisch verloop.

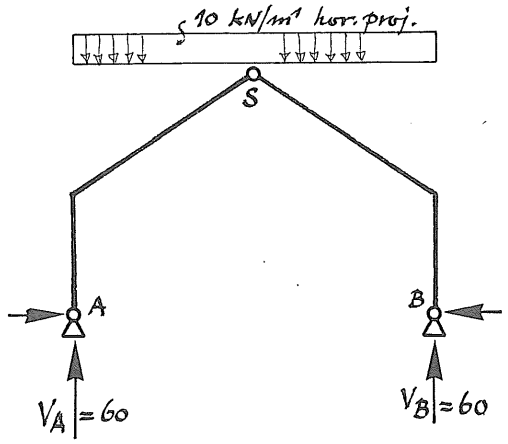
Merk op dat de spantvorm de parabolische druklijn slecht "volgt". Daardoor ontstaan betrekkelijk grote momenten in stijlen en regel.
We zullen in het volgende voorbeeld zien hoe we deze momenten kunnen reduceren door de spantvorm aan de vorm van de druklijn aan te passen.



Voorbeeld 2

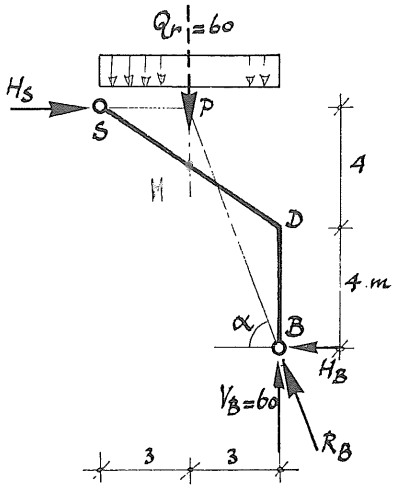
Het hier getekende kniespant is een meer gebruikelijke vorm voor een driescharnierspant.

De dakbelasting op de schuine spantbenen CS en DS werkt verticaal, volgens de richting van de zwaartekracht.
De gelijkmatig verdeelde belasting op de schuine spantbenen wordt dikwijls omgerekend in een belasting q kN per strekkende meter, horizontaal gemeten. Dit wordt aangegeven als q kN/m¹ hor. proj. (horizontale projectie).
De belasting is hier getekend als een horizontale band.



De verticale oplegreacties zijn:

$$V_A = V_B = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ kN}$$

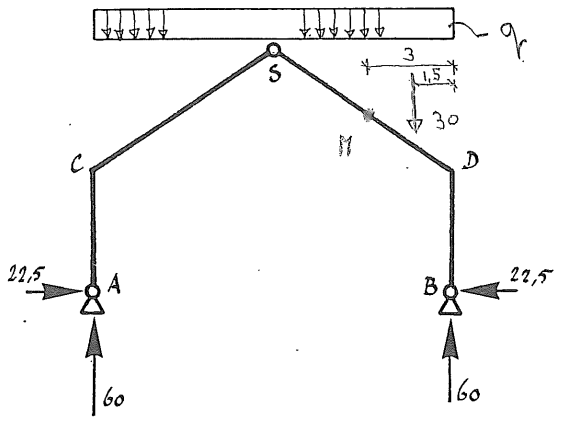


We beschouwen de rechterhelft BDS.
Uit $\Sigma V = 0$, en uit de symmetrie volgt $V_S = 0$

De werklijn van R_B gaat door het snijpunt P van de werklijnen van H_S en Q_r.
Hiermee ligt de richting van R_B vast. $tg\alpha = \frac{8}{3}$

$H_B = \frac{3}{8} \cdot V_B = \frac{3}{8} \cdot 60 = 22{,}5$ kN

$H_S = H_B = 22{,}5$ kN



Uit de symmetrie van het spant volgt

$H_A = H_B = 22{,}5$ kN

$M_M = 60 \cdot 3 - 22{,}5 \cdot 6 - 30 \cdot 1{,}5 = 0$

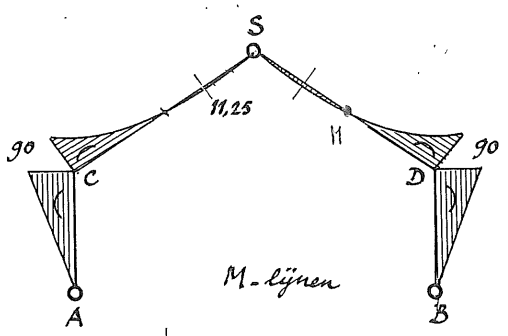
We bepalen nu de M-lijnen van het spant.

Spantdeel BD: $M_B = 0$

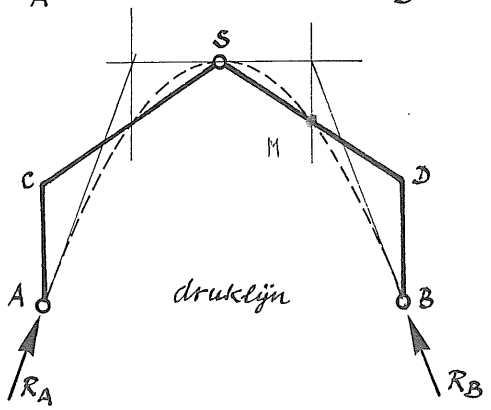
$M_D = 22{,}5 \cdot 4 = 90$ kNm
(rechtlijnig verloop tussen B en D).

Spantdeel DS: $M_S = 0$

$M_D = 90$ kNm

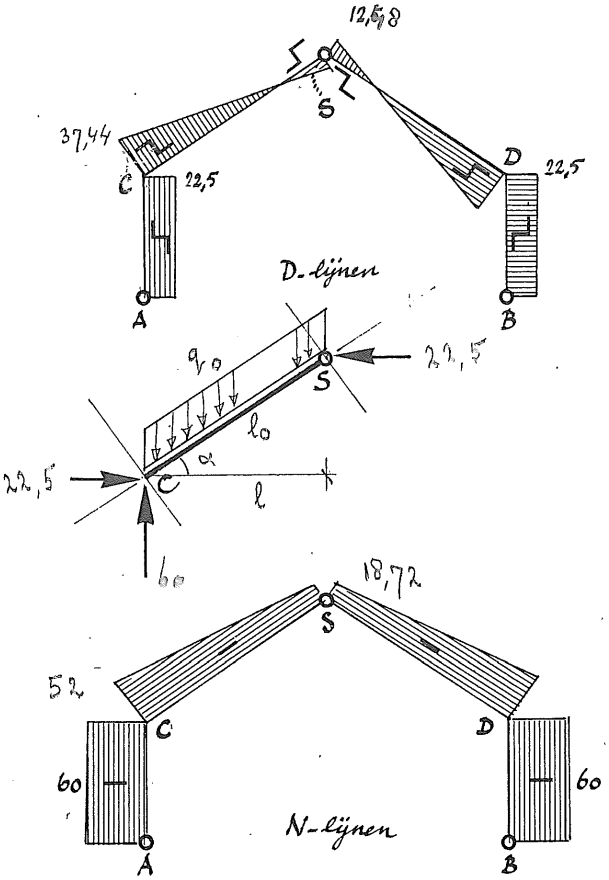


Tussen S en D verloopt de M-lijn parabolisch t.g.v. de gelijkmatig verdeelde belasting.
Er treedt een buigpunt (momentennulpunt) op.



Hiernaast is de druklijn getekend die parabolisch verloopt (q-belasting).
De raaklijnen zijn aangegeven.
De druklijn snijdt de staafas tussen C en S, daar waar M = 0.

De spantvorm volgt de druklijn aanzienlijk beter dan in het vorige voorbeeld. Bij gelijkblijvende belasting (in horizontale projectie) zijn de momenten in de hoekpunten C en D nu 90 i.p.v. 180 kNm.



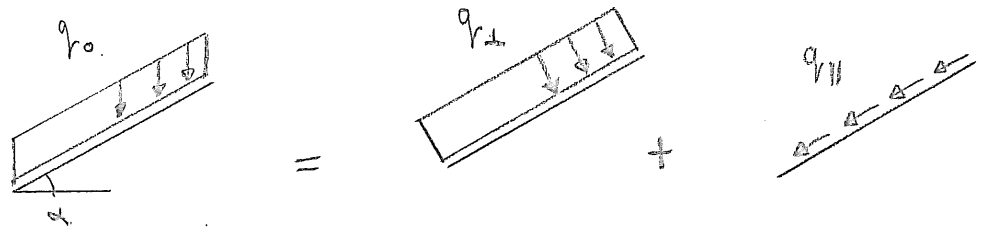
We tekenen nog de D-lijnen en de N-lijnen.

In de verticale delen AC en BD zijn de waarden van dwarskracht en normaalkracht eenvoudig af te leiden uit de oplegreacties bij A en B.

Om de D- en N-lijnen van de schuine delen CS en DS te kunnen tekenen moeten alle krachten die op CS, resp. DS werken, worden ontbonden evenwijdig aan en loodrecht op de staafas van deze delen.

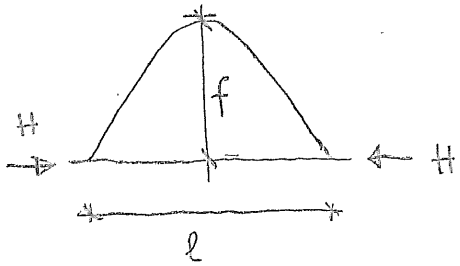
Dat is hier niet gedaan.
Alleen de vorm van D- en N-lijnen van CS en DS is getekend.

$$q_0 = \frac{q \cdot l}{l_0} = \cos\alpha \cdot q$$



$$q_\perp = \cos\alpha \cdot q_0 = \cos^2\alpha \cdot q$$

$$q_{\parallel} = \sin\alpha \cdot q_0 = \sin\alpha \cos\alpha \, q$$



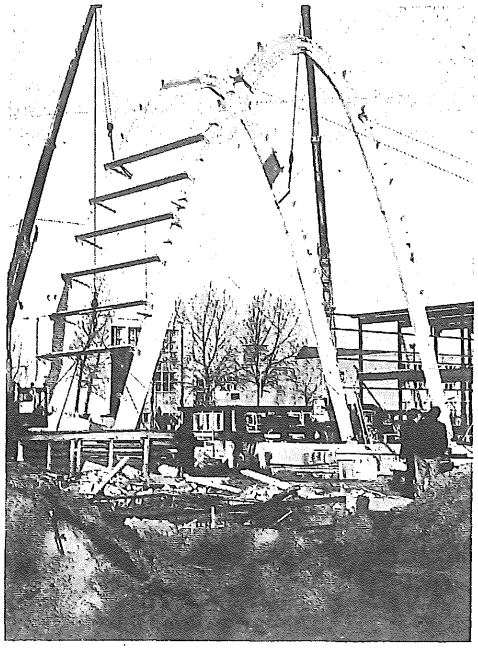
zie blz 14-7:

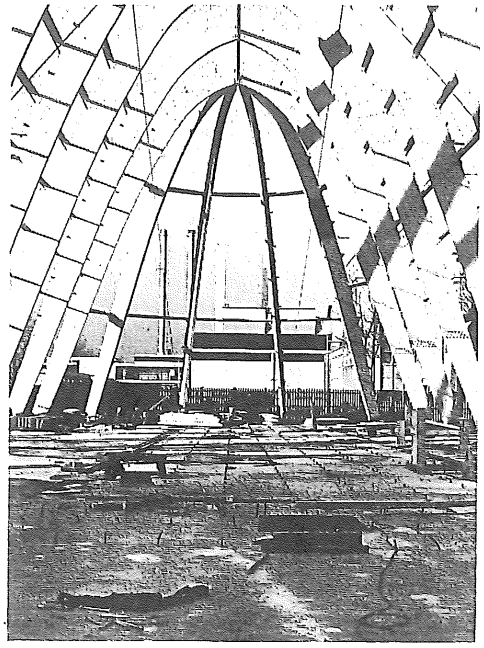
$$H = \frac{q l^2}{8 f} = \frac{10 \cdot (12)^2}{8 \cdot 8} = 22{,}5 \text{ kN}$$

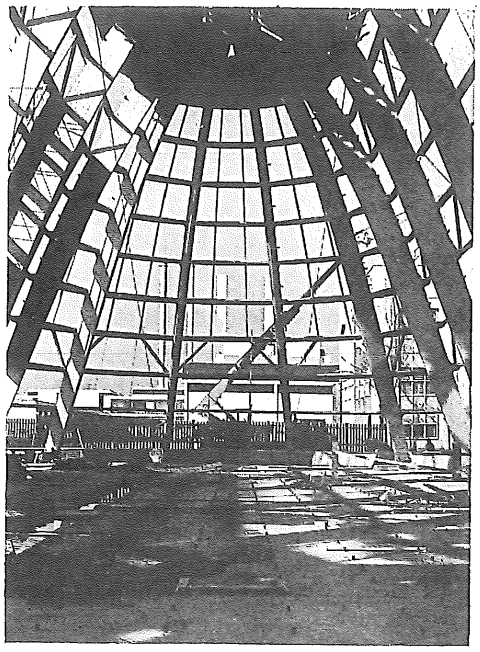
$q = 10$ kN/m

$l = 12$ m

$f = 8$ m

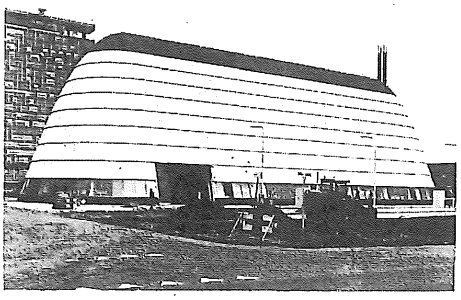


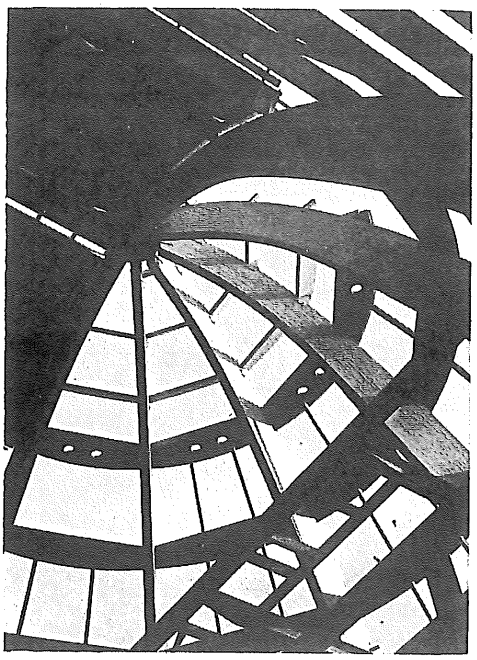




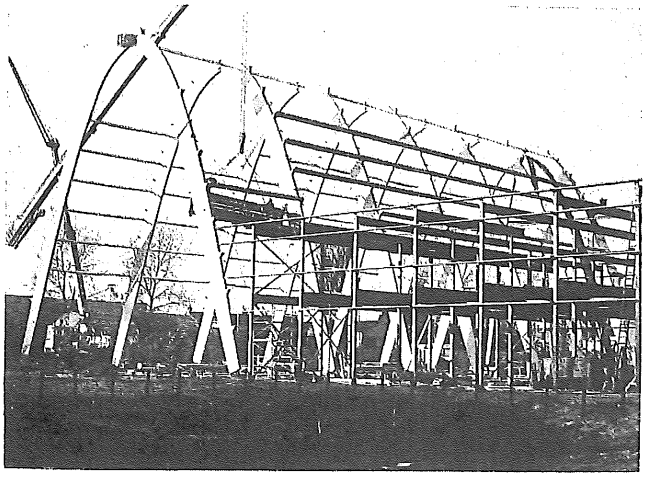
Reportage van de bouw van de hal
'Apparatenbouw/Procesindustrie'
Rotterdamseweg, T.H.Delft.

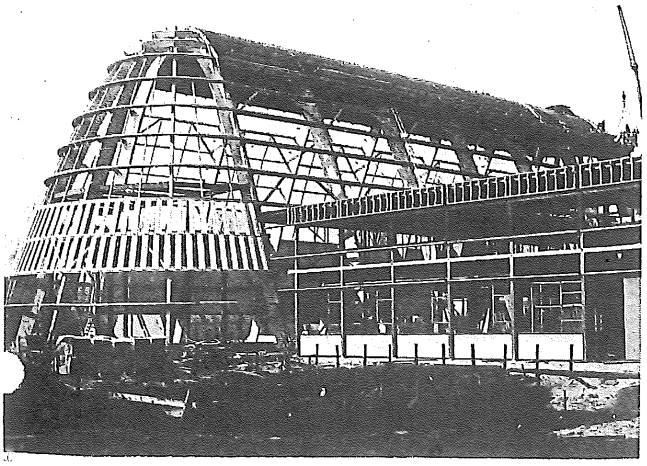
Arch.: Drexhage, Sterkenburg, Bodon. 1977

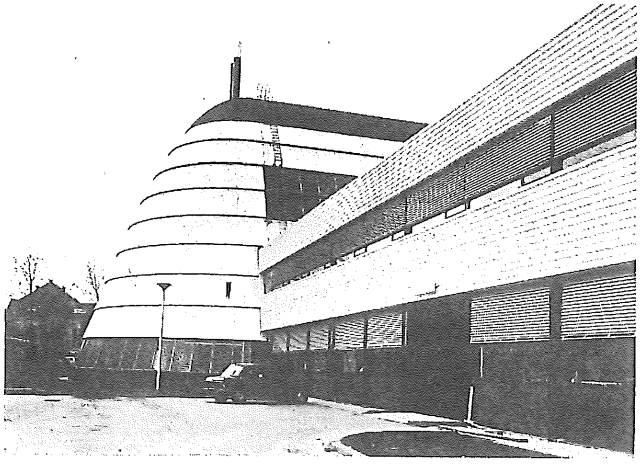




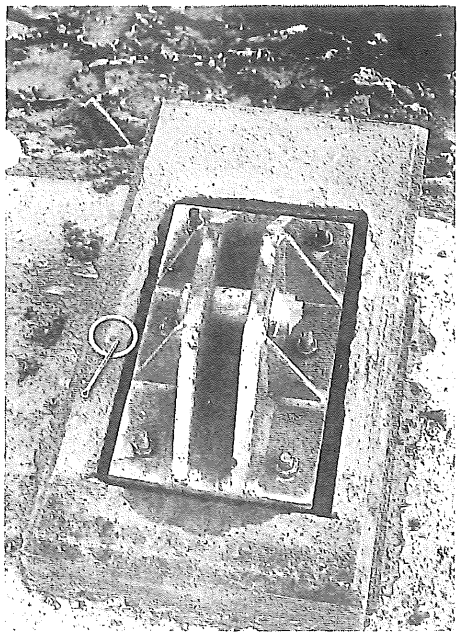
Opnamen: Fotografiese Dienst Bouwkunde

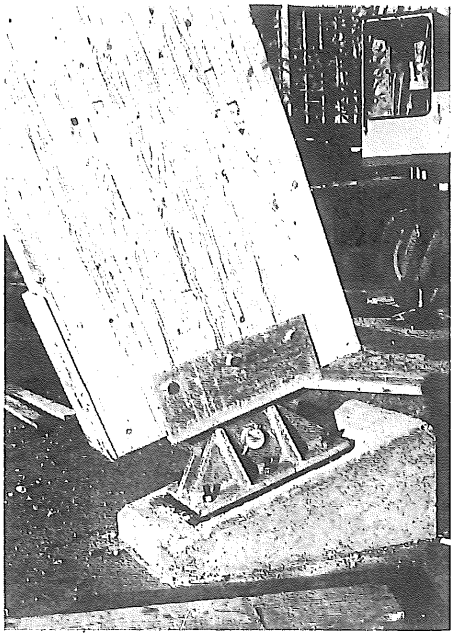
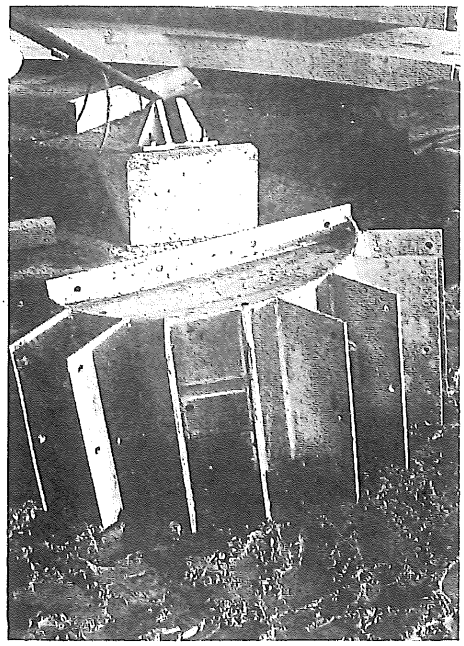
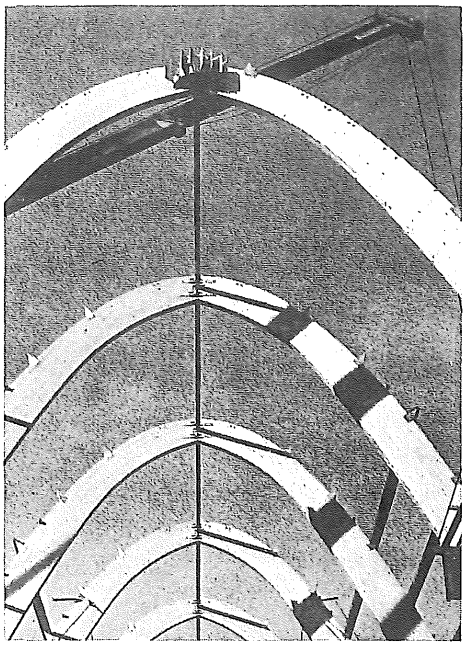
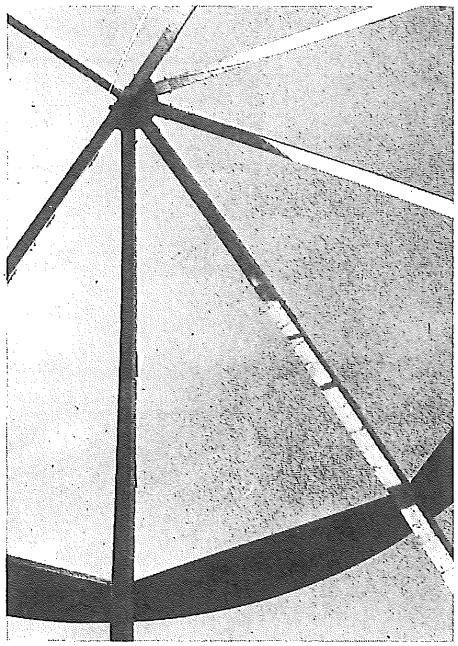
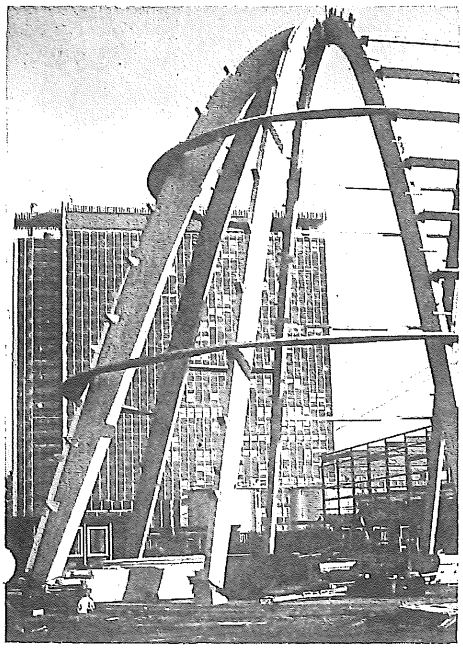
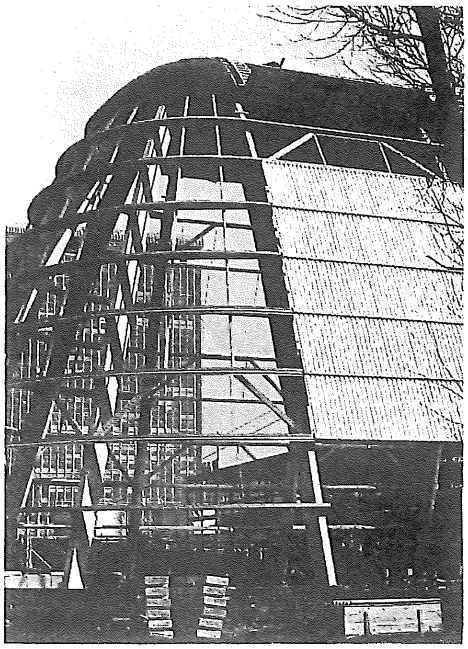
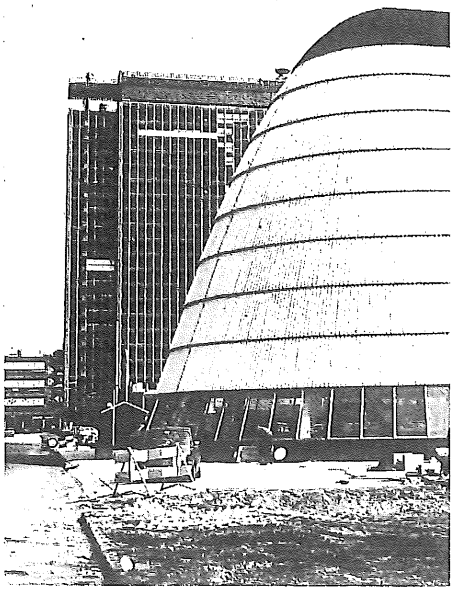


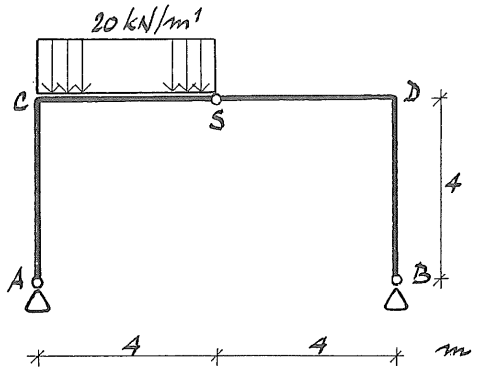




17. fotoblad 1 = rechts

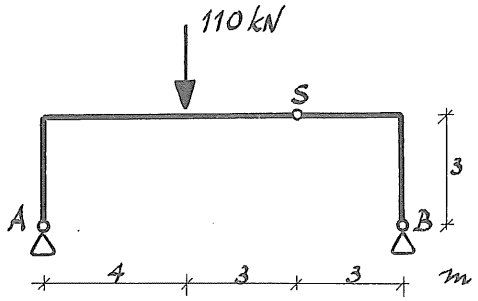


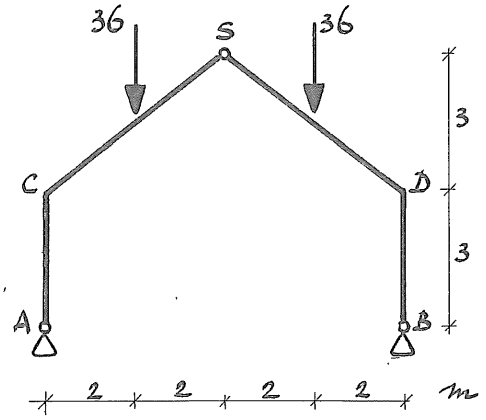


6. VRAAGSTUKKEN

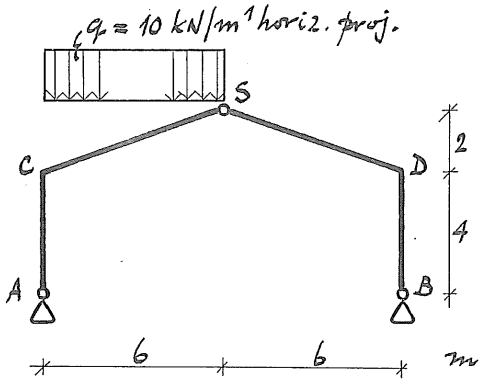
1. Bepaal de oplegreacties.
Teken de M-, N- en D-lijn voor het spant.



2. Teken de druklijn en bepaal daarmee de buigende momenten.
Teken daarna de M-, D- en N-lijn voor het spant.



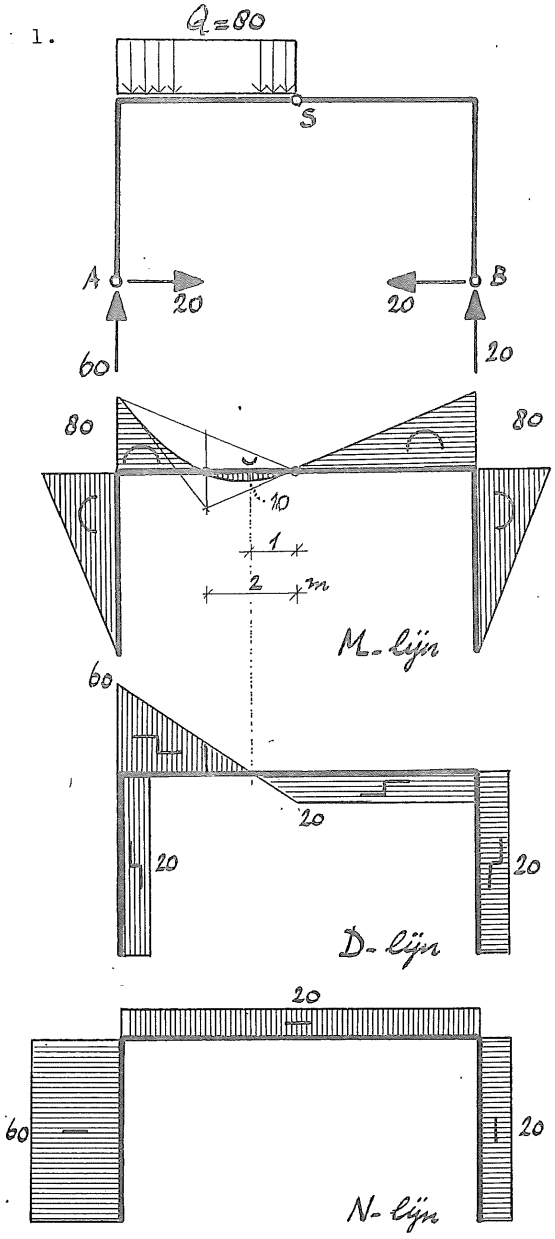
3. Bepaal de oplegreacties.
Teken de druklijn en bepaal daarmee de buigende momenten in het spant.
Teken daarna de M-, D- en N-lijn voor het spant.



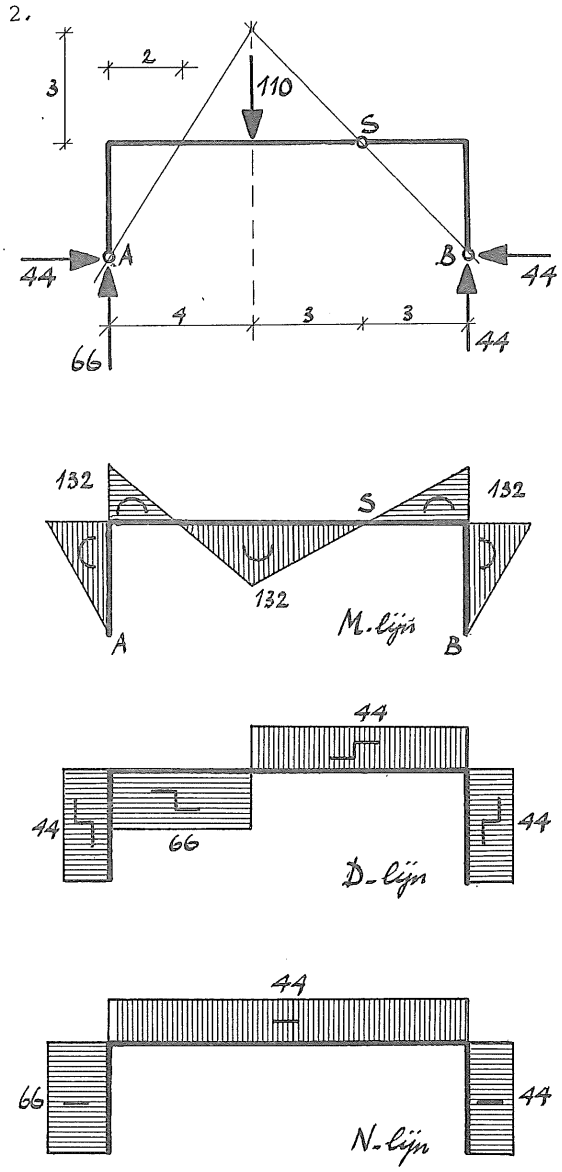
4. Bepaal de M-, D- en N-lijn voor spant ASB.

ANTWOORDEN

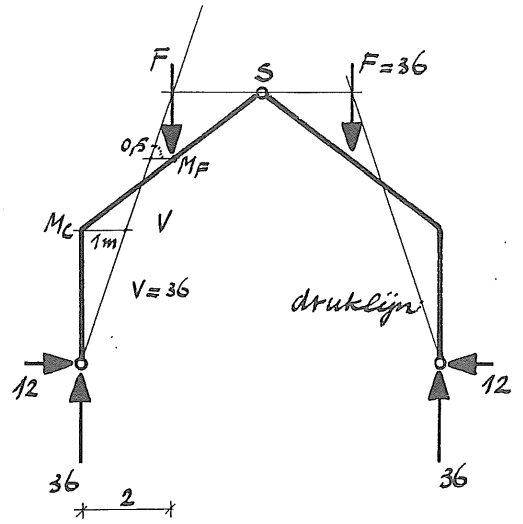
1.

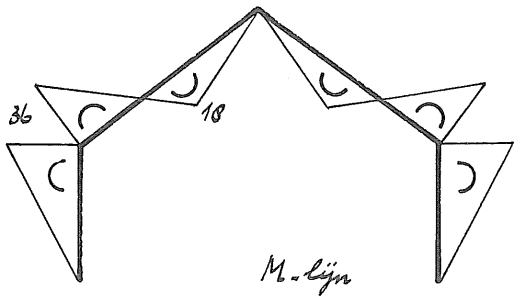


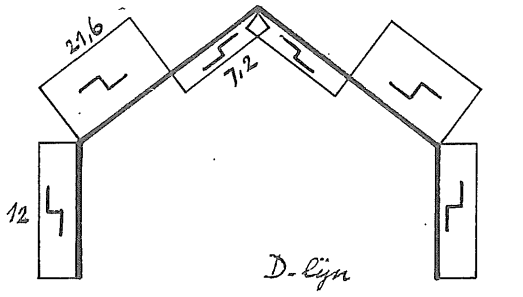
2.

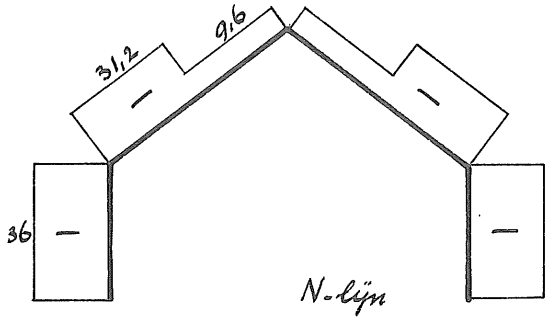


3.

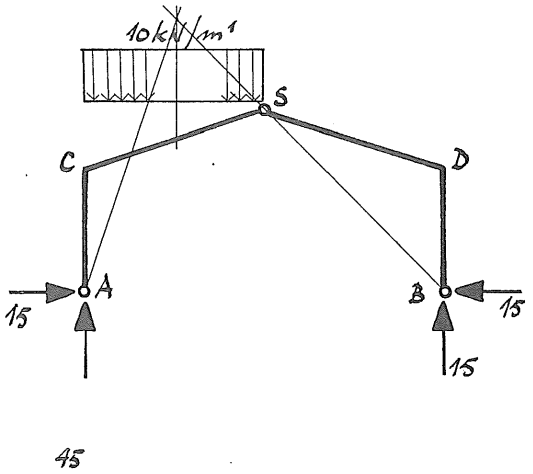

F
S
F=36
0,5
MF
MC
V
1m
V=36
drukljn
12
12
36
36
2

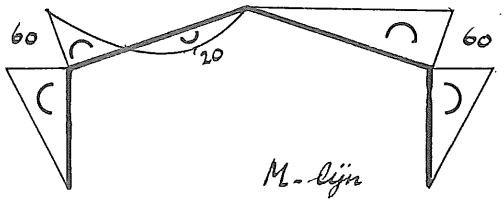

36
18
M-ljn

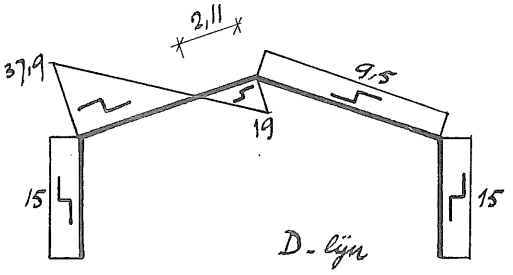

21,6
7,2
12
D-ljn

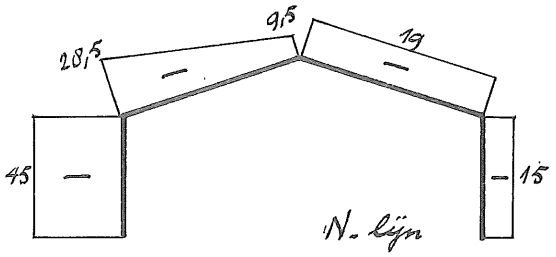

31,2
9,6
36
N-ljn

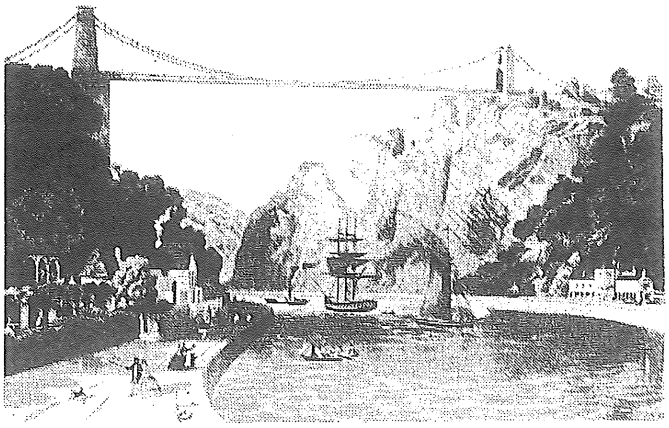
4.


10kN/m¹
S
C
D
A
B
15
15
15
45


60
20
60
M-ljn


2,11
37,9
9,5
19
15
15
D-ljn


9,5
28,5
19
45
15
N-ljn

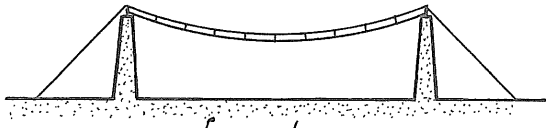


The Clifton Suspension Bridge as completed by Brunel's fellow engineers after his death.

1. KABELCONSTRUCTIES

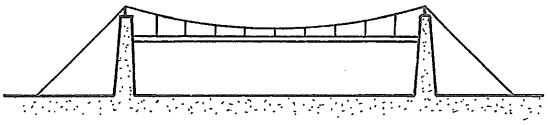
Stalen kabels zijn zeer slappe bouwelementen. Ze zijn in het algemeen zo slap dat we verwaarlozen dat ze inwendige buigende momenten kunnen leveren. Dan kunnen ze ook geen dwarskrachten opnemen.
Kabels kunnen alleen normaalkrachten opnemen en dan nog slechts trekkrachten.

Als draagconstructie zijn stalen kabels het eerst toegepast bij bruggen.
Pas later zijn stalen kabels toegepast voor het overspannen van grote kolomvrije ruimten. Kabelconstructies worden o.a. toegepast voor hang- en tuidaken. Deze dakconstructies worden uitgevoerd in verschillende vormen.



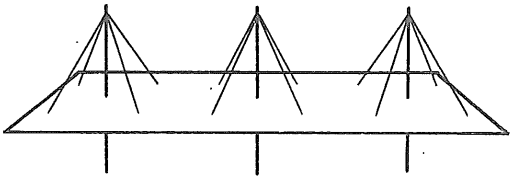
hangdak

Bij een hangdak wordt het dak direct gedragen door de kabels, b.v. zoals aangegeven in de figuur.



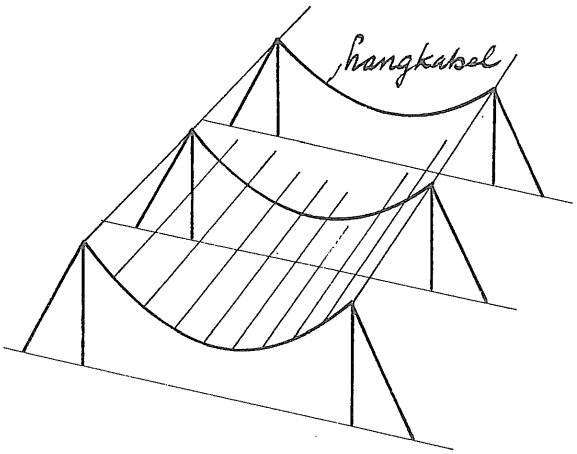
tuidak

Bij een tuidak wordt het dak opgehangen aan de kabels.
De constructievorm volgens de eerste figuur vertoont veel overeenkomst met de vorm van de constructie van een hangdak. Het maakt voor de berekening van de kabelkrachten nauwelijks enig verschil of het dak wordt gedragen door of is opgehangen aan de kabels.



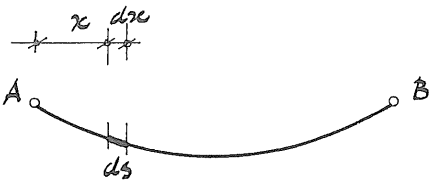
tuidak

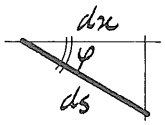
De constructievorm volgens de tweede figuur daarentegen is een duidelijke vorm van een tuidak-constructie.



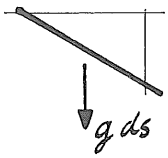
We zullen ons bezighouden met eenvoudige hang- en tuidaken waarbij de kabels in één richting parallel lopen. Deze daken bezitten slechts in één richting een gekromd vlak.
We spreken in dit geval van lineaire hang- en tuidaken.

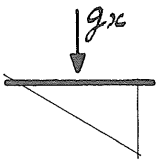
De kabelconstructie van deze lineaire daken heeft een eenvoudig evenwichtssysteem waarbij de vorm van de kabel wordt bepaald door de stangenveelhoek tengevolge van de belasting van deze kabel.

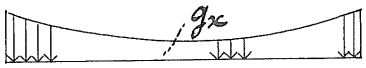




$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$$



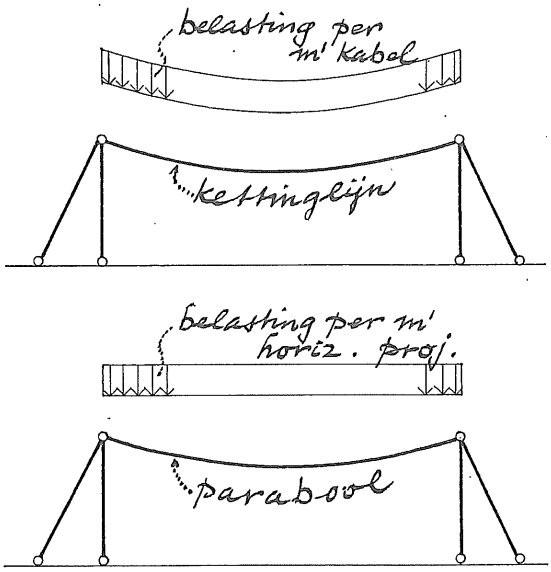




Indien de kabel alleen zichzelf moet dragen dan is de belasting van de kabel - horizontaal gemeten - niet gelijkmatig verdeeld.
We kunnen dit als volgt verklaren.
Stel de kabel weegt g N/m^1.
Bekijken we een deeltje van de kabel met een lengte ds, gemeten langs de kabel, dan weegt dit g.ds N.
De horizontale projectie van de lengte ds is dx.
Dus horizontaal gezien is de belasting g_x gelijk aan:

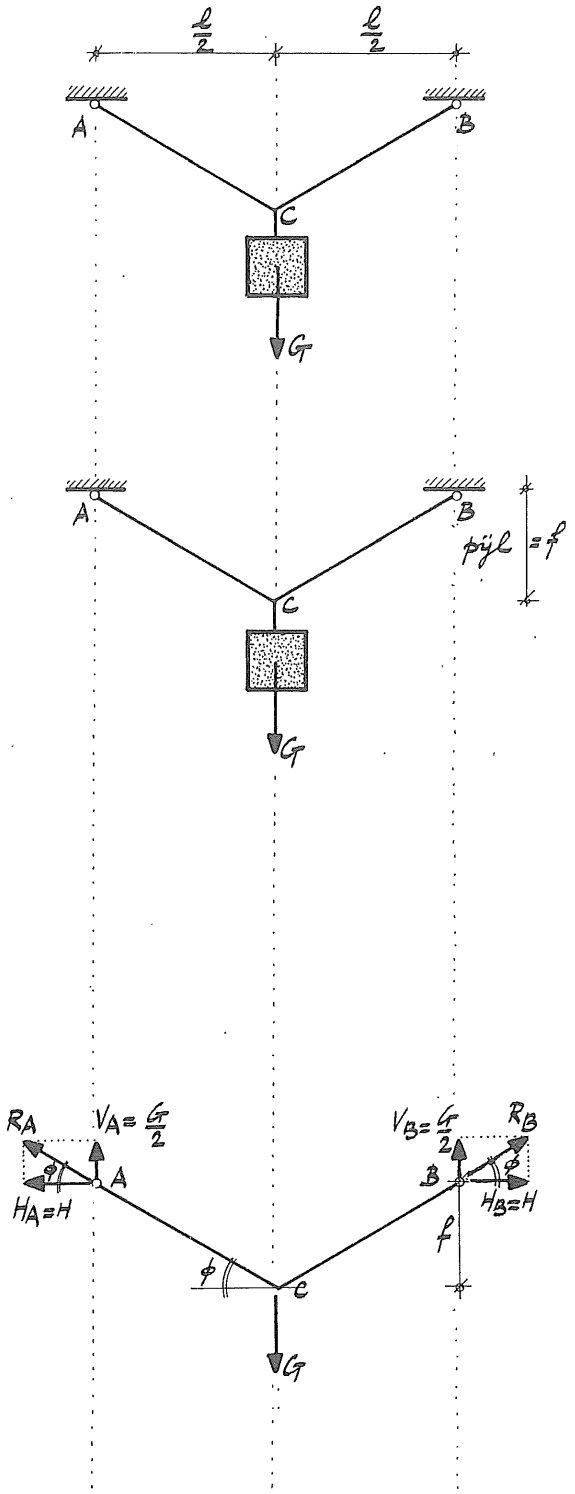
$$g_x = \frac{g.ds}{dx} = \frac{g}{\cos\phi} \quad N/m^1$$

Bij de ophangpunten A en B van de kabel is hoek ϕ het grootst en dus cos ϕ het kleinst. Daarom is in deze punten g_x het grootst. In het midden van de kabel is $\phi = 0$ en dus de belasting $g_x = g$ N/m^1.
We zien dat g_x niet constant is.



Tengevolge van de belasting $g_x = \frac{g}{\cos\phi}$ neemt de kabel de vorm aan van een zogeheten <u>kettinglijn</u>.
(De wiskundige vorm van deze lijn is een cosinushyperbolicus functie).

Zouden we rekenen met een gelijkmatig verdeelde belasting g N/m^1 - horizontaal gemeten - dan neemt de kabel de vorm aan van een <u>parabool</u>.
Omdat het gewicht van de kabels in het algemeen klein zal zijn ten opzichte van het gewicht van de totale dakconstructie, maken we geen grote fout indien we het kabelgewicht - horizontaal gemeten - als gelijkmatig verdeeld beschouwen.



Puntlast

Als eerste voorbeeld beschouwen we een kabel die in A en B is bevestigd en in het midden C wordt belast door een massa met een gewicht G. De kabel zal in dit geval een driehoekig verloop hebben.

De grootte van de krachten in de kabel en in de ophangpunten zal afhankelijk zijn van de pijl f van de kabel. We zullen dit nagaan.

In de ophangpunten A en B ontstaan tengevolge van het gewicht G de reactiekrachten R_A en R_B.
Uit $\Sigma V = 0$ en $\Sigma M = 0$ (of uit de symmetrie) volgt dat de verticale componenten van deze reactiekrachten moeten zijn:

$$V_A = V_B = \frac{1}{2} G$$

Uit $\Sigma H = 0$ volgt dat voor de horizontale componenten geldt:

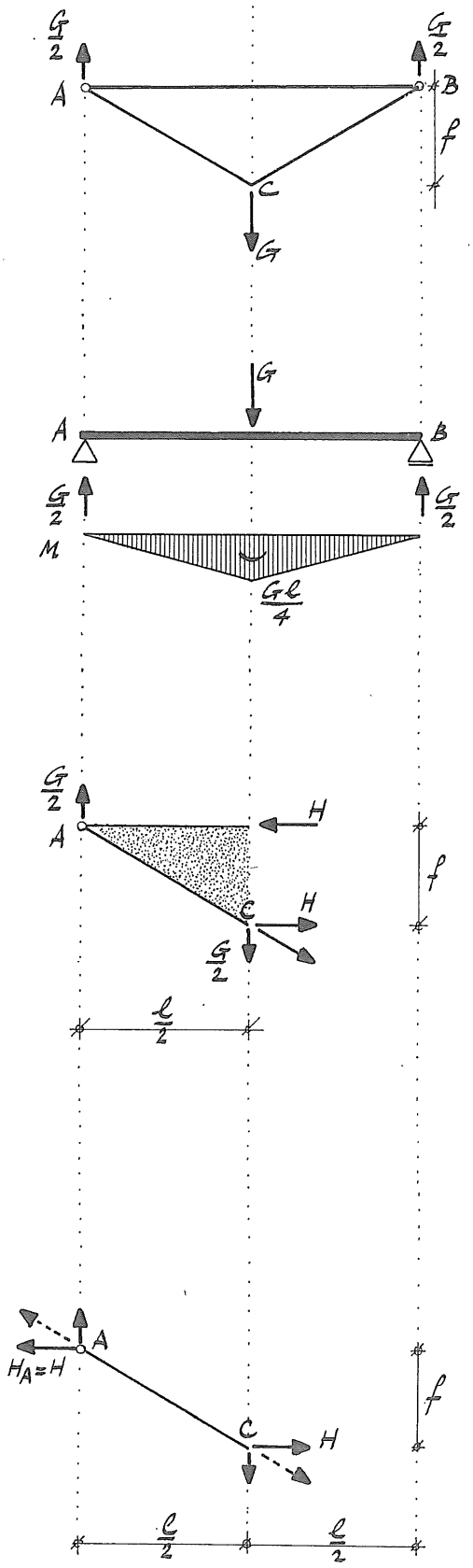
$$H_A = H_B = H$$

Uit de figuur kunnen we afleiden dat:

$$tg\phi = \frac{\frac{1}{2} G}{H} \qquad \text{en} \qquad tg\phi = \frac{f}{\frac{1}{2} l}$$

Hieruit volgt voor de grootte van kracht H:

$$\boxed{H = \frac{\frac{1}{4} G.l}{f}}$$



We kunnen de grootte van kracht H ook bepalen door tussen de ophangpunten een verbindingsstaaf AB aan te brengen.
Kracht H wordt dan opgenomen door deze verbindingsstaaf. Daardoor ontstaan in de ophangpunten A en B slechts de verticale reactiekrachten V_A en V_B waarvoor geldt:

$$V_A = V_B = \frac{1}{2} G$$

We beschouwen nu kabel en verbindingsstaaf als één constructie die is te vergelijken met een ligger op twee steunpunten A en B.

We brengen een snede aan direct links van het midden van de constructie.
Het moment in deze middendoorsnede is:

$$M = \frac{1}{2} G \cdot \frac{1}{2} l = \frac{1}{4} G.l$$

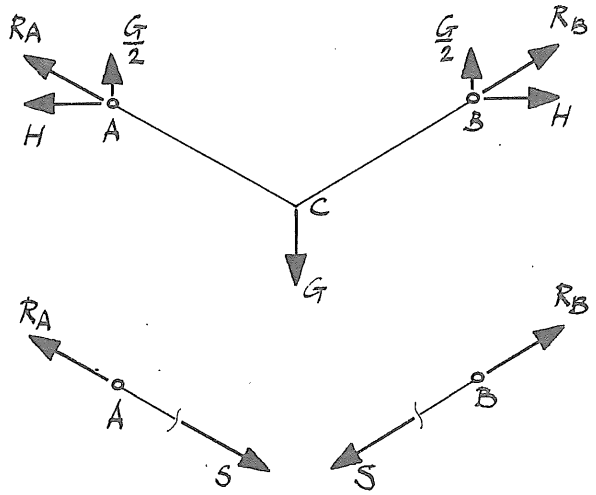
Omdat kabel en verbindingsstaaf zelf geen momenten kunnen opnemen moet dit moment M volledig worden opgenomen door het koppel gevormd door de krachten H.
Het moment van dit koppel is H.f
Nu geldt: $H.f = \frac{1}{4} G.l$

Of: $$H = \frac{\frac{1}{4} G.l}{f}$$

Halen we de verbindingsstaaf AB weer weg dan volgt uit de voorwaarde $\Sigma H = 0$ voor het kabeldeel links van de middendoorsnede:

$$H_A = H = \frac{\frac{1}{4} G.l}{f}$$

Uit $\Sigma H = 0$ volgt dan verder direct dat $H_A = H_B$.



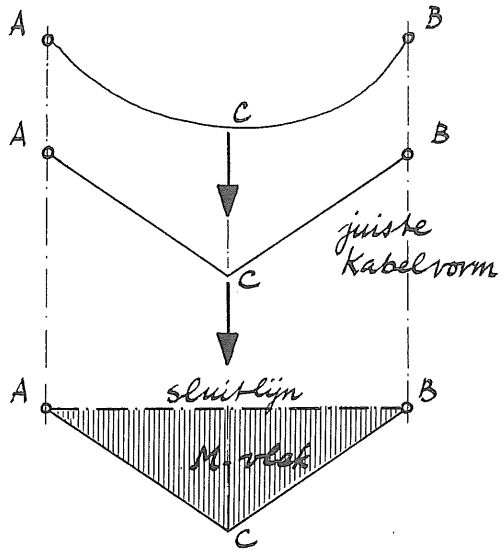
Zodra de grootte van kracht H bekend is kunnen de krachten in de ophangpunten en de kabel worden bepaald.
Voor de reactiekrachten in A en B vinden we:

$$R_A = R_B = \sqrt{H^2 + (\tfrac{1}{2}\,G)^2}$$

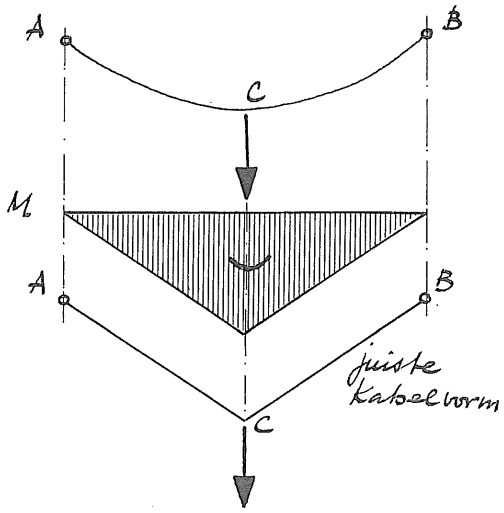
Verder geldt voor de kracht S in de kabel:

$$S = R_A = R_B$$

We zien dat de grootte van de krachten S, R_A en R_B mede wordt bepaald door de grootte van kracht H. De grootte van deze kracht is afhankelijk van de waarde van de pijl f. Dit betekent dus dat de krachten in de kabel en in de ophangpunten ook afhankelijk zijn van de pijl f van de kabel.

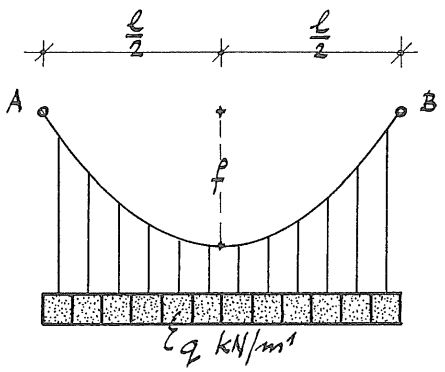


Door het aanbrengen van de verbindingsstaaf AB (sluitlijn) ontstaat de driehoek ABC. Deze driehoek is te beschouwen als een gesloten stangenveelhoek die, op een bepaalde schaal, de juiste vorm weergeeft van het momentenvlak van de totale constructie.

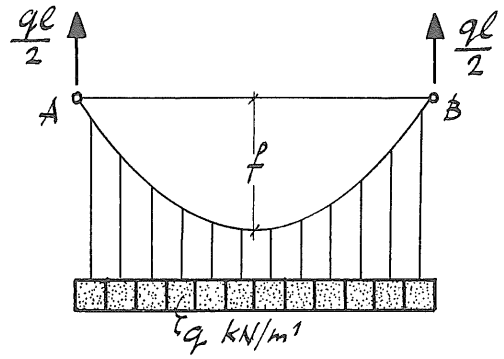


Dit betekent dat we omgekeerd uit het momentenvlak de juiste kabelvorm en de grootte van de horizontale componenten van de krachten in de kabel kunnen afleiden.

Gelijkmatig verdeelde belasting

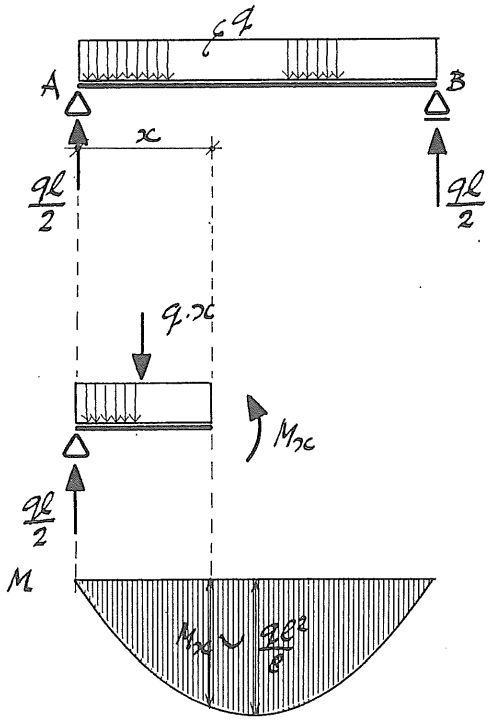


Als tweede voorbeeld beschouwen we een kabel die in A en B is bevestigd, maar die wordt belast door een - horizontaal gemeten - gelijkmatig verdeelde belasting q kN/m^1.
De kabel heeft een pijl f.



Brengen we de verbindingsstaaf AB aan dan komt de momentenlijn voor deze constructie (kabel + verbindingsstaaf) overeen met de momentenlijn van een ligger AB op twee steunpunten.
De verticale reactiekrachten zijn:

$V_A = V_B = \frac{1}{2}\, q.l$

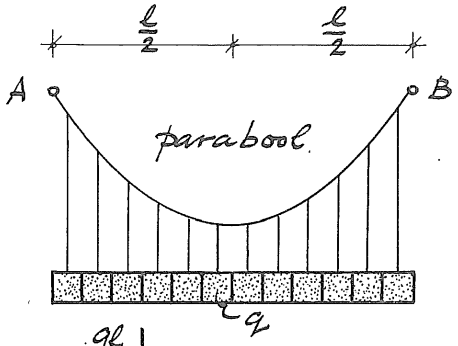


Voor de momentenlijn geldt:

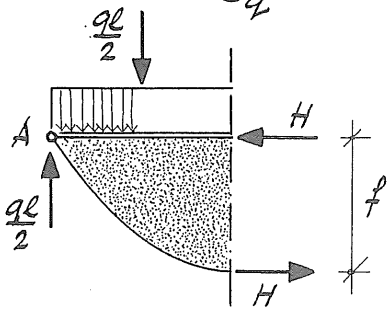
$M_x = \frac{1}{2}\, q\,.\,l\,.\,x - \frac{1}{2}\, q\,.\,x^2 = \frac{1}{2}\, q\,.\,x\,.\,(l - x)$

Dit is de vergelijking van een parabool.
Het maximum moment is:

$M_{max} = \frac{1}{8}\, q.l^2$



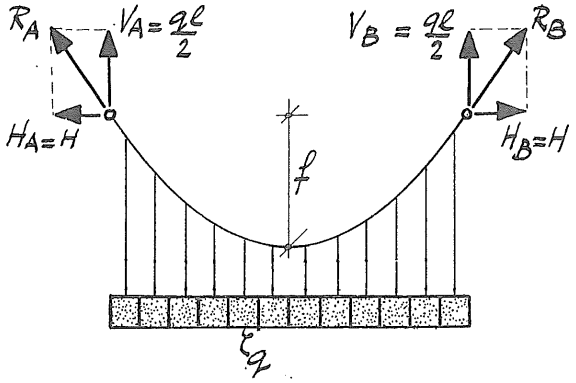
Het kabelverloop tengevolge van de belasting q komt overeen met de gevonden momentenlijn.
Dit kabelverloop is dus parabolisch.



Brengen we een snede aan in het midden dan vinden we voor de grootte van kracht H:

$$H = \frac{M_{max}}{f} = \frac{\frac{1}{8}\, q.l^2}{f}$$

Dus: $$\boxed{H = \frac{q.l^2}{8f}}$$

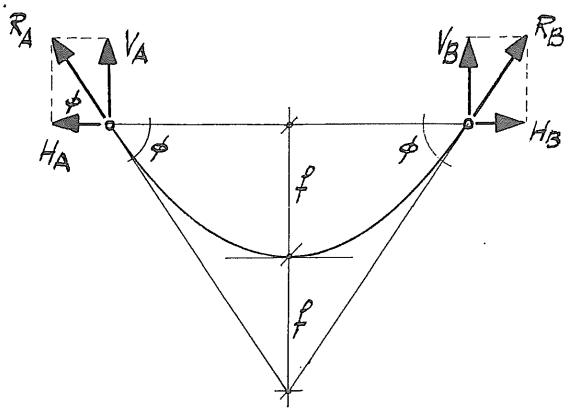


De totale reactiekrachten in A en B zijn:

$$R_A = R_B = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\, q.l)^2 + (\tfrac{q.l^2}{8f})^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, q.l \sqrt{1 + (\tfrac{l}{4f})^2}$$

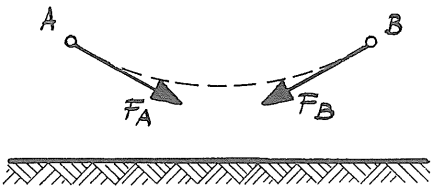
De grootste waarde voor de kracht in de kabel is gelijk aan de grootte van de krachten R_A en R_B.
De kleinste waarde voor de kracht in de kabel is gelijk aan de grootte van kracht H.

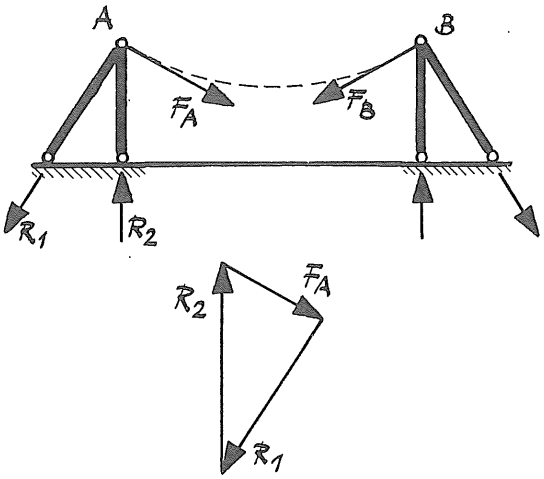


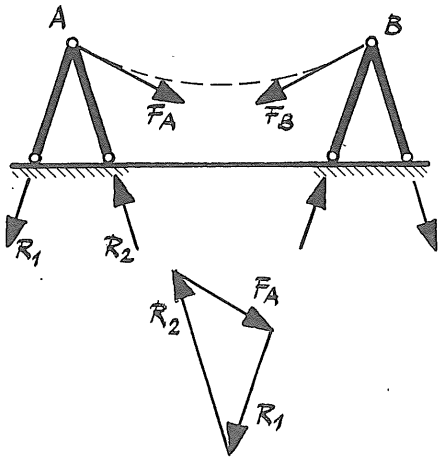
<u>Opmerking</u>
Voor de hellingshoek bij A en B geldt:

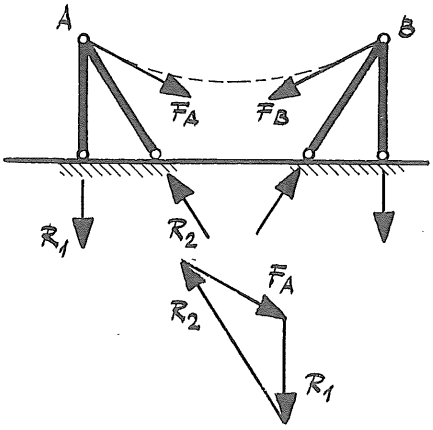
$$tg\phi = \frac{V_A}{H_A} = \frac{\frac{1}{2}\, q.l}{\frac{q.l^2}{8f}} = \frac{2f}{\frac{1}{2}l}$$

Dit betekent dat de raaklijnen in A en B aan de kabel elkaar snijden op een afstand van 2f onder de lijn AB. Dit is een belangrijke eigenschap van de parabool.









Ondersteuningsconstructies

De actiekrachten F_A en F_B die door de kabel worden uitgeoefend op de ophangpunten A en B moeten worden afgevoerd naar de aardkorst. Daarvoor zijn ondersteuningsconstructies nodig.

Voor deze constructies zijn vele goede oplossingen mogelijk; we zullen er twee geven.

Een eenvoudige constructie is de steunbok, samengesteld uit twee staafvormige elementen. We kunnen de hellingen van deze elementen willekeurig kiezen.
De grootte van de krachten R_1 en R_2 in de elementen kan o.a. worden bepaald met behulp van een krachtendriehoek en is afhankelijk van deze hellingen, zoals blijkt uit de figuren.

Hoe we de hellingen van de elementen ook kiezen, altijd zal in één van de elementen een trekkracht ontstaan.

DEEL III KRACHTSOVERDRACHT EN VORMGEVING

pag 85 - Inleiding
86 - Relatie kracht en vorm bij puntlasten
92 - Relatie kracht en vorm bij gelijkmatig verdeelde belastingen
95 - Druklijn en treklijn
97 - Relatie druklijn en momentenlijn
101 - Vergelijking van overspanningsvormen

1. Inleiding

Nu we inmiddels kennis hebben gemaakt met een aantal konstruktieve systemen is het mogelijk deze met elkaar te vergelijken wat betreft de relatie krachtsoverdracht en vormgeving.

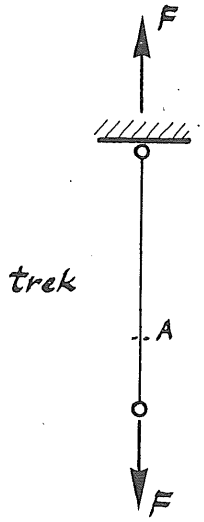
In dit hoofdstuk zal blijken dat de krachtsoverdracht in ogenschijnlijk verschillende systemen veel overeenkomst vertoont.

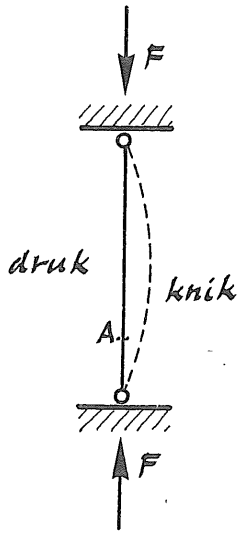
De krachtsoverdracht in en de vormgeving van een konstruktie worden bepaald door:

- het statisch systeem; dat is het schema van de konstruktie, de wijze waarop deze ondersteund wordt en de belastingen die erop aangrijpen.
- het konstruktiemateriaal en de verbindingen van de onderdelen van een konstruktie.
- de uitvoering.

Met betrekking tot de primaire krachtsoverdracht in konstruktieve elementen onderscheiden we:

- op trek belaste elementen
- op druk belaste elementen
- op buiging belaste elementen

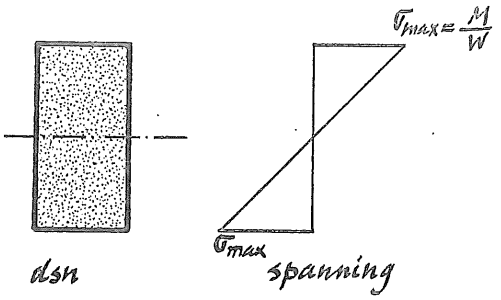




In zuiver op trek belaste elementen treden uitsluitend trekspanningen op $\sigma = \frac{F}{A}$

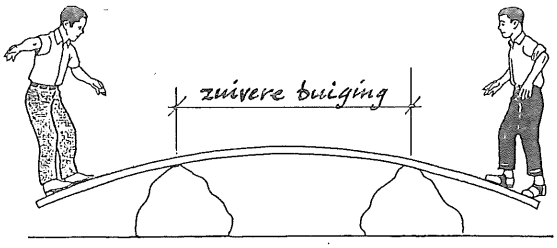
Het voordeel is dat in elke vezel van de doorsnede dezelfde spanning optreedt, waardoor het materiaal volledig wordt benut.

In zuiver op druk belaste elementen treden uitsluitend drukspanningen op: $\sigma = \frac{F}{A}$.
In verband met knik moeten we vooral bij slanke staven de toelaatbare spanningen aanzienlijk reduceren. Daardoor kan het materiaal niet volledig worden benut.

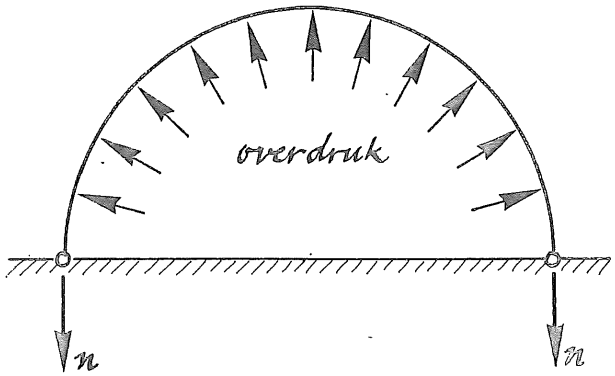


In zuiver op buiging belaste elementen treden uitsluitend buigspanningen op. Omdat in een op buiging belaste doorsnede de grootste spanningen optreden in de uiterste vezels $\sigma_{max} = \frac{M}{W}$, wordt ook bij buiging het materiaal niet volledig benut. Uit een oogpunt van minimaal materiaalgebruik is de volgorde waarnaar we bij het konstrueren streven:

1. op trek belaste elementen
2. op druk " "
3. op buiging " "



Bij vrijwel alle konstruktieve systemen zijn we aangewezen op kombinaties van trek, druk en buiging.



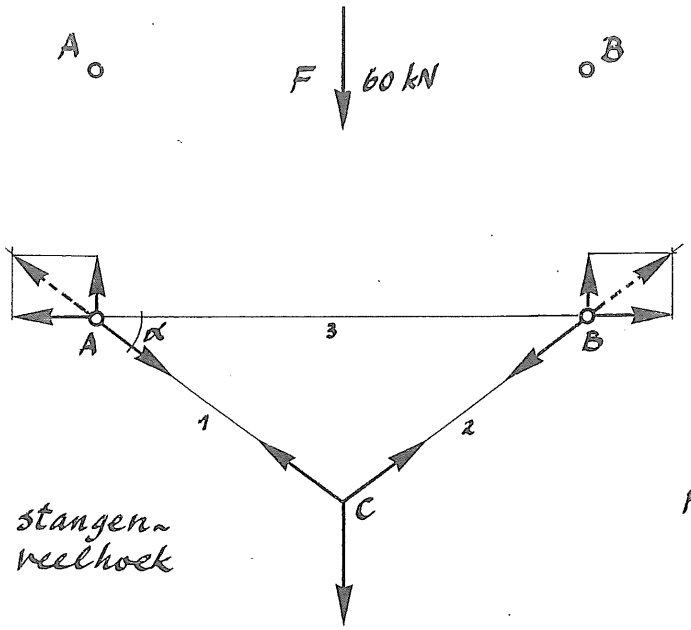
Hoofddraagkonstrukties, waarin uitsluitend trekkrachten lijken op te treden zijn bijvoorbeeld pneumatische konstrukties.

Toch is ook dit een systeem, waarin naast trekspanningen (in het materiaal van de pneu) ook drukspanningen (overdruk van de lucht) optreden.

2. Relatie kracht en vorm bij puntlasten.

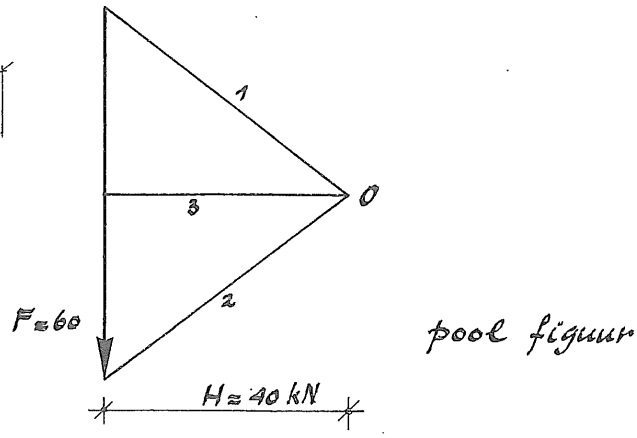
Met behulp van een poolfiguur en een stangenveelhoek kunnen we krachten samenstellen en ontbinden. Dit is een grafische methode, die in het 1e jaar is behandeld. Deze methode gaan we voor een aantal karakteristieke belastinggevallen in beeld brengen, om daarna aan te geven hoe in verschillende konstruktieve systemen de belastingoverdracht plaatsvindt, resp. hoe deze moeten worden vormgegeven om de belastingen op de meest logische wijze af te voeren naar de opleggingen.

We gaan hierbij steeds uit van twee oplegpunten A en B op gelijke hoogte, met uitsluitend vertikale belastingen waarvan de werklijnen zich tussen deze twee oplegpunten bevinden.



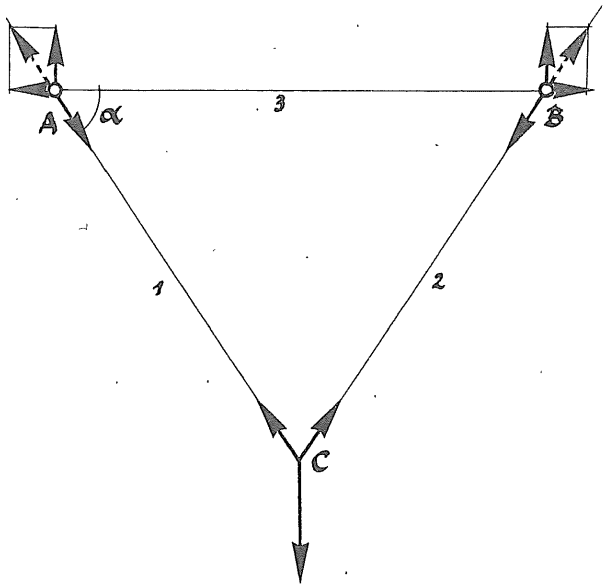
a. <u>één puntlast</u>

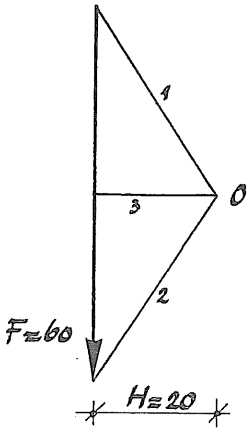
Bepalend voor de grootte van de komponenten van kracht F en de werklijnen van deze krachten is de keuze van pool O.



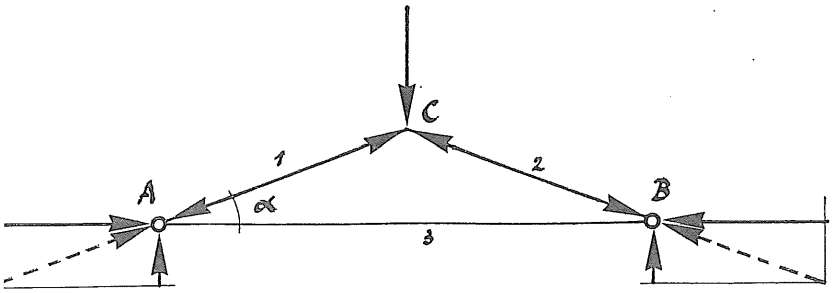
Uit deze figuren volgt voor de krachten:

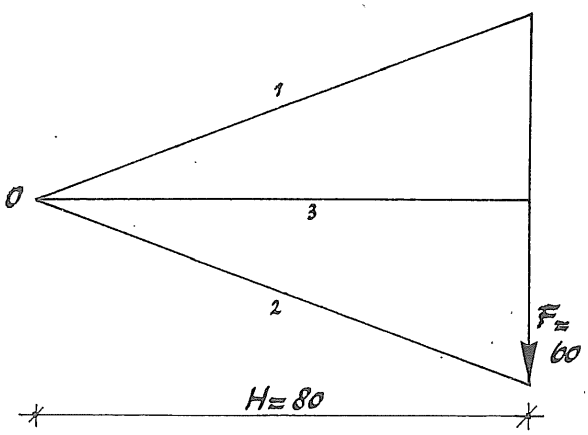
- de vertikale komponenten in A en B zijn onafhankelijk van de poolafstand
- de horizontale komponenten in A en B zijn gelijk, doch tegengesteld gericht

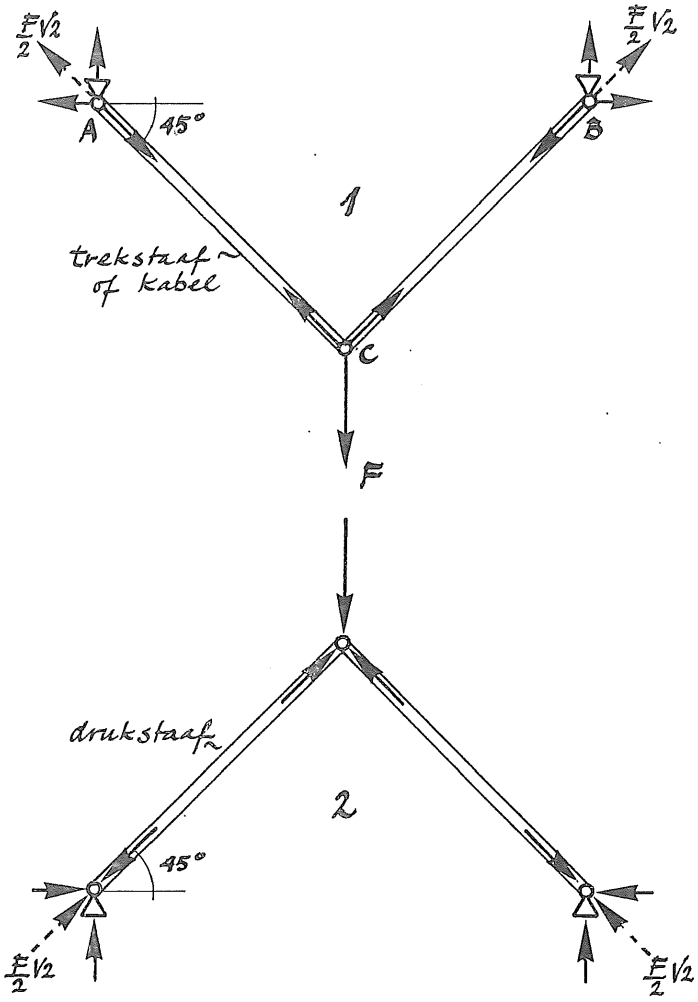




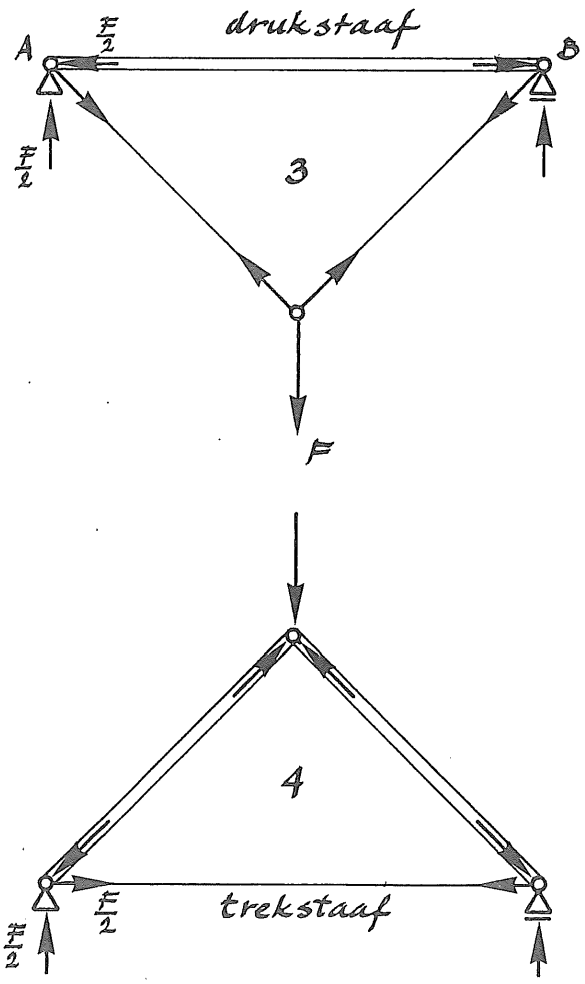
- kleine poolafstand leidt tot een grote hoek α en kleine horizontale komponenten in A en B
- grote poolafstand leidt tot een kleine hoek α en grote horizontale komponenten in A en B.. Indien hoek α = 0 worden de horizontale krachten in A en B oneindig groot.





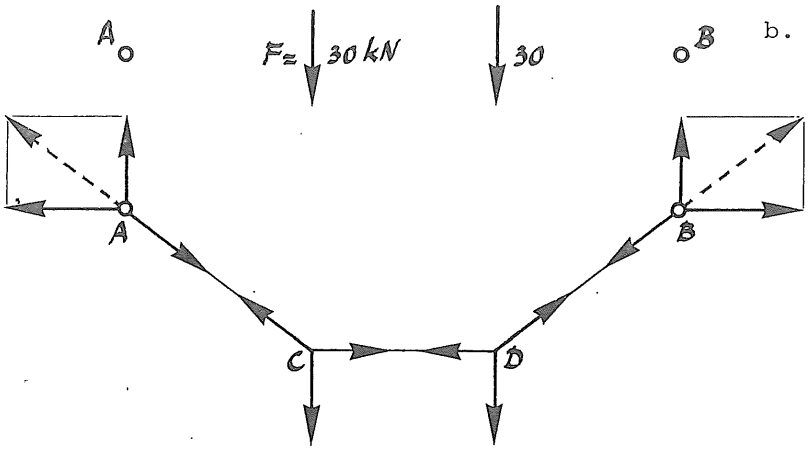


Uit deze figuren volgen de volgende konstruktieve systemen, waarin uitsluitend normaalkrachten voorkomen.
In de konstrukties volgens de figuren 1 en 2 treden er in de oplegpunten bij A en B naast vertikale oplegreakties ook horizontale oplegreakties op.

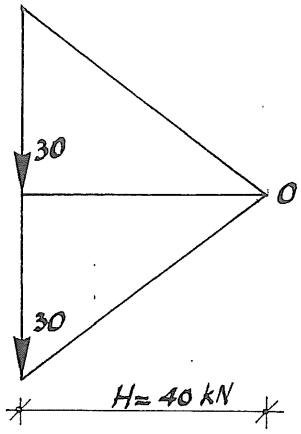


In de konstrukties volgens de figuren 3 en 4 treden er in de oplegpunten bij A en B uitsluitend vertikale oplegreakties op. De horizontale komponenten van de schuine staven worden opgenomen door een druk- of een trekstaaf.

b. twee puntlasten

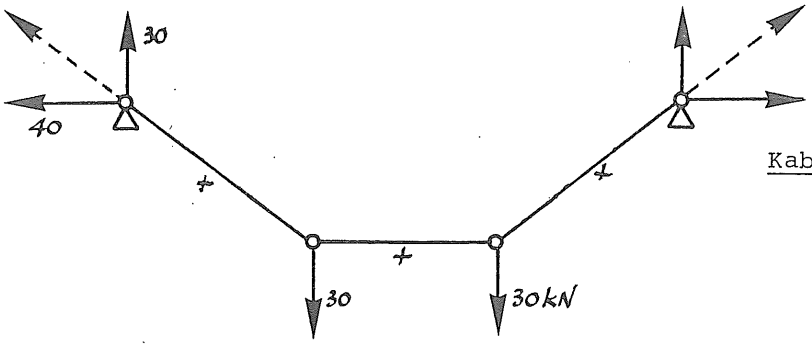


stangen veelhoek

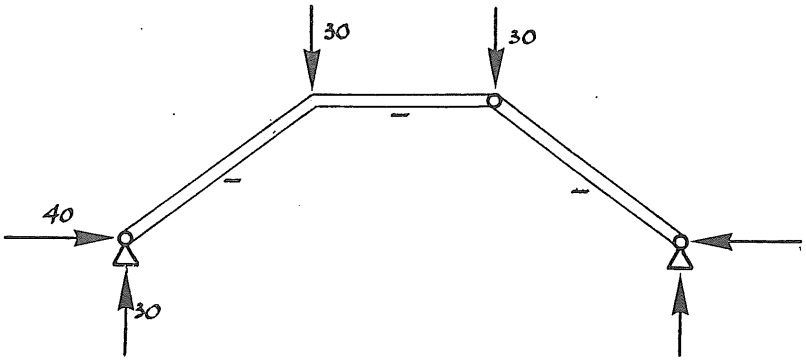


pool figuur

Konstruktieve systemen

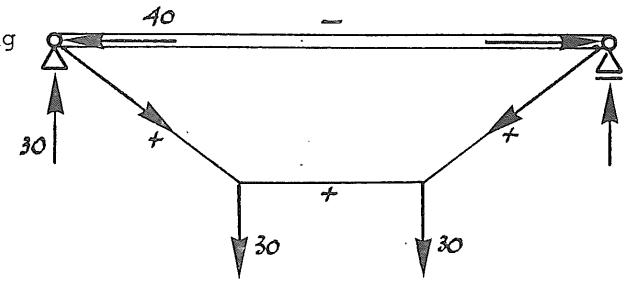


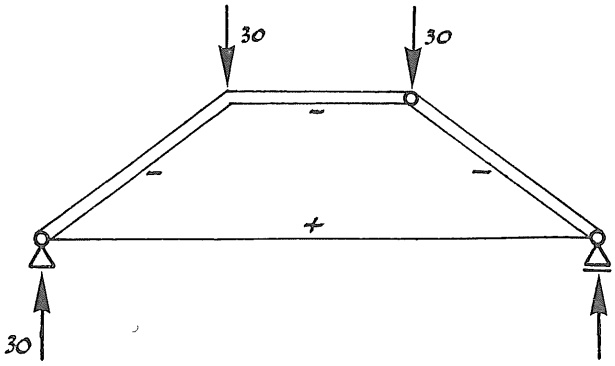
Kabelkonstruktie



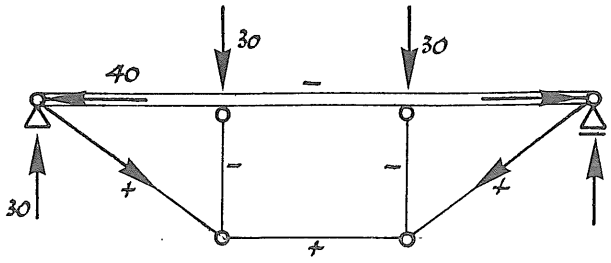
Driescharnierspant

Kabelkonstruktie "gesloten" met een drukstang

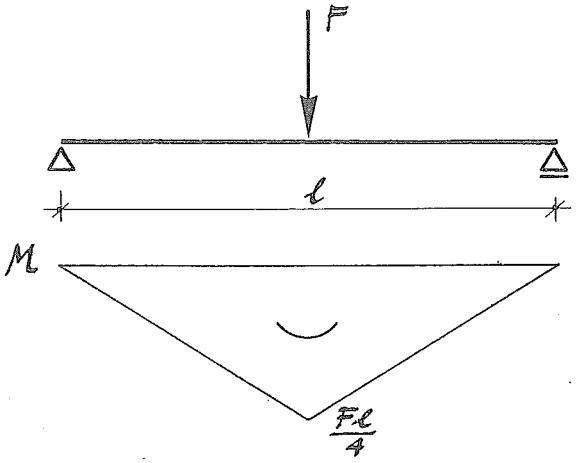




Spantkonstruktie "gesloten" met een trekstang

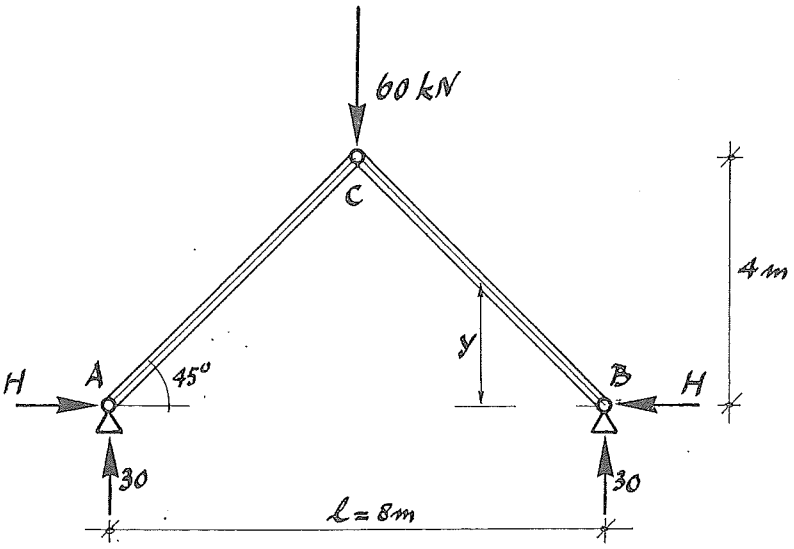


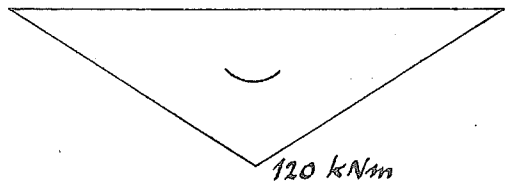
Versterkte balk (springwerk)



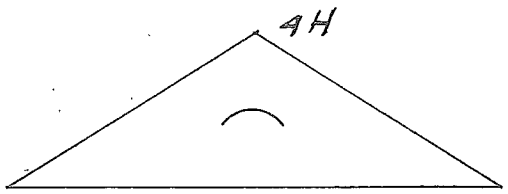
c. <u>vergelijking met ligger voor één puntlast</u>

In de onder a getekende konstrukties treden geen momenten op. Dit komt omdat er, of door de oplegreakties of door een horizontale staaf horizontale krachten op worden uitgeoefend. De grootte van deze horizontale krachten kunnen we als volgt afleiden van een op buiging belaste ligger op twee steunpunten.



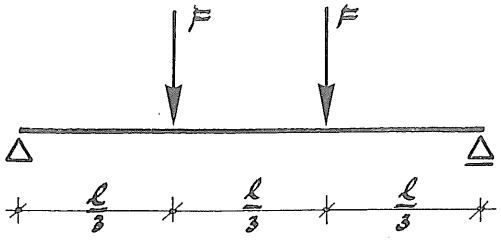


Bij een ligger op 2 steunpunten is
$M_{max} = M_C = \frac{1}{4} \times 60 \times 8 = 120$ kNm.
De M-lijn heeft de volgende vorm

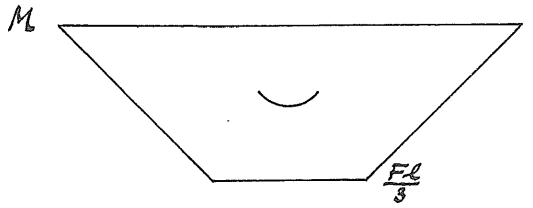


Door de horizontale kracht H worden er momenten op de konstruktie uitgeoefend met tegengesteld teken. Het max. negatieve moment moet gelijk zijn aan het max. positieve moment.

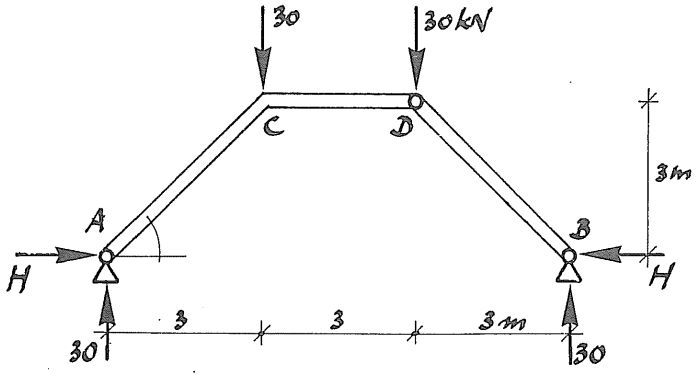
Superpositie van beide M-lijnen geeft
$M = 0$.
Door de horizontale kracht H worden in de konstruktie momenten uitgeoefend van $H \times y$.
In C geldt $y = \frac{\ell}{2} = 4$ m.
De voorwaarde voor $M_C = 0$ geeft:
$H \times 4 = 120 \rightarrow H = 30$ kN.



d. <u>vergelijking met ligger voor twee puntlasten</u>



$$M_{max} = \frac{Fl}{3}$$

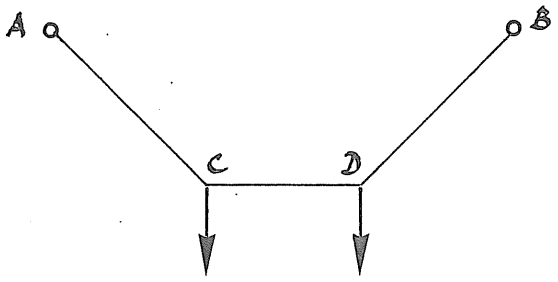


$$M_D = 30 \times 3 = 90 \text{ kNm}$$

$$H = \frac{M_D}{h} = \frac{90}{3} = 30 \text{ kN}$$

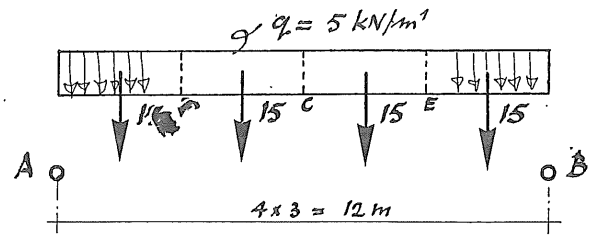
<u>Opmerkingen</u>

- Indien ook in C een scharnier wordt aangebracht is de konstruktie labiel.
- Indien in D geen scharnier wordt aangebracht kunnen we deze berekening niet zonder meer uitvoeren, omdat de konstruktie dan statisch onbepaald is. We kunnen dan immers in het staafwerk geen punten aanwijzen waarvoor de voorwaarde geldt $M = 0$.



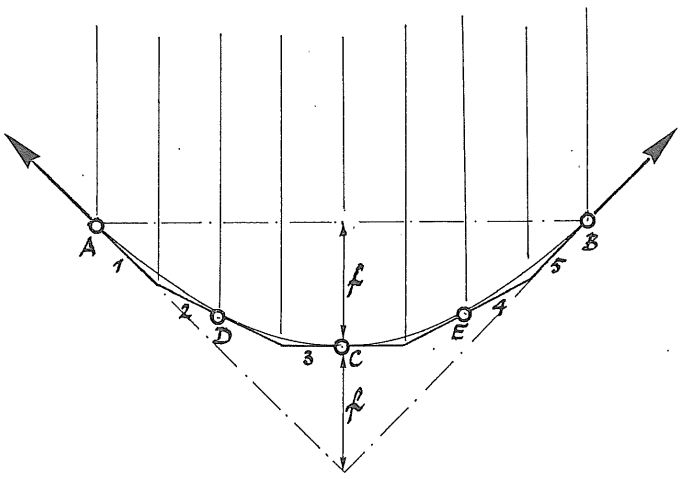
- Dit geldt wel voor de omgekeerde vorm, als deze met een kabel wordt uitgevoerd.

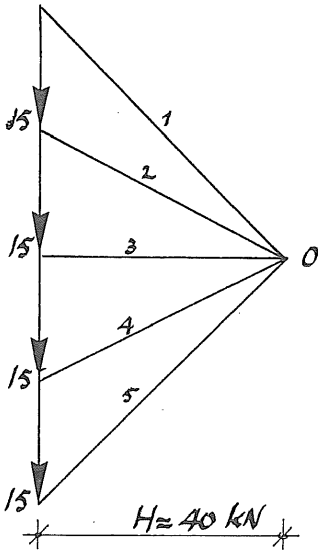
Kabels kunnen immers geen momenten opnemen, zodat we weer kunnen stellen $M_C = M_D = 0$.

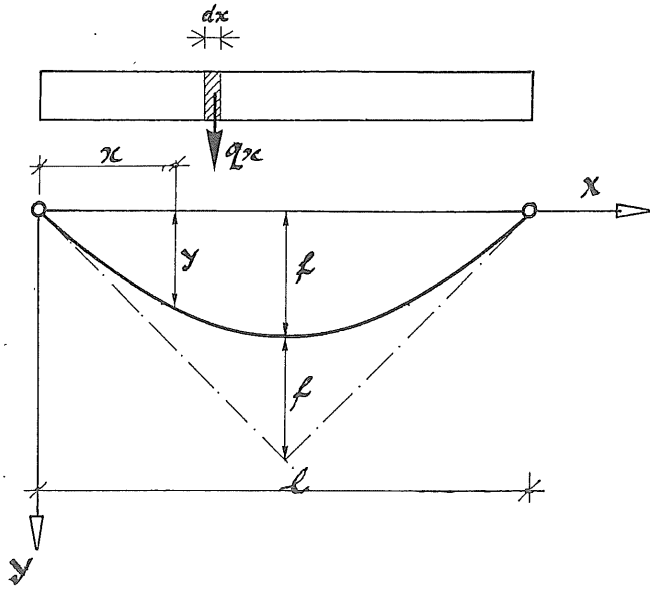


3. Relatie kracht en vorm bij gelijkmatig verdeelde belastingen

De belasting wordt in een aantal gelijke moten verdeeld. De deellijnen tussen de moten worden op die plaatsen gekozen, waar bij een ligger op 2 steunpunten de maximale momenten worden verwacht. Voor de konstruktie van de poolfiguur en de stangenveelhoek verdelen we de belasting in 4 moten, met elk een resultante van 3 x 5 = 15 kN.







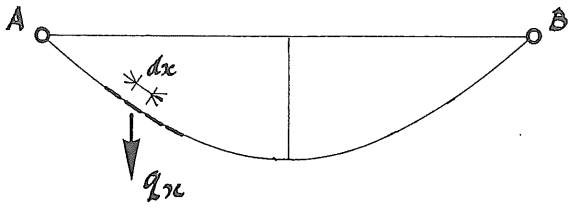
De stangenveelhoek kunnen we ook konstrueren voor een groot aantal kleine belastingmoten. Indien we de belasting verdelen in strookjes dx met krachtjes qx ontstaat een vloeiende lijn - de parabool -

De algemene formule voor de parabool is:

$$y = \frac{4 \times f \times x\ (l-x)}{l^2}$$

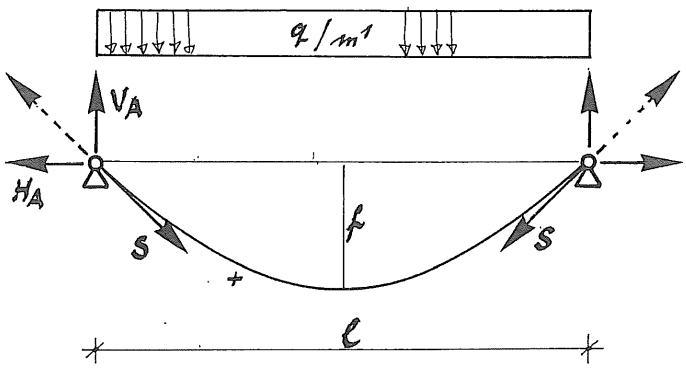
f = pijl in het midden

Kettinglijn



Indien de belasting per lengte-eenheid dx langs de kromme gelijk is, ontstaat een z.g. kettinglijn. Een kabel gaat door zijn eigen gewicht de vorm aannemen van een kettinglijn. Het verschil met de paraboolvorm is echter klein. Omdat bij de meeste konstrukties het eigen gewicht van een kabel verwaarloosbaar klein is t.o.v. de belasting die er aan hangt, kunnen we bij berekeningen van kabelkonstrukties meestal uitgaan van de paraboolvorm indien althans de belasting per m^1 (horizontaal gemeten) gelijkmatig verdeeld is.

Konstruktieve systemen

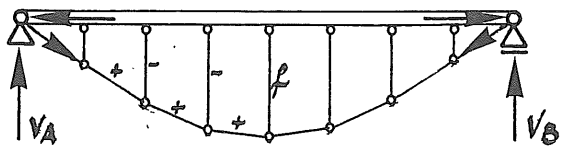


Kabel

Uit de symmetrie volgt

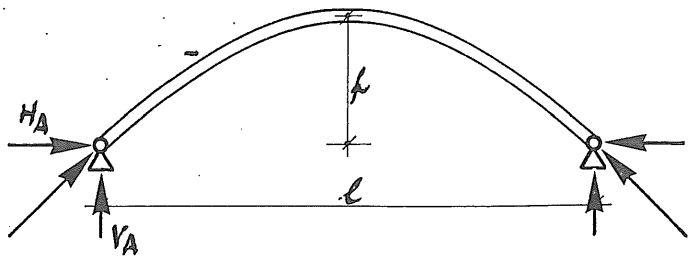
$V_A = V_B = \frac{gl}{2}$

Uit $\Sigma H = 0$ volgt $H_A = H_B = H$



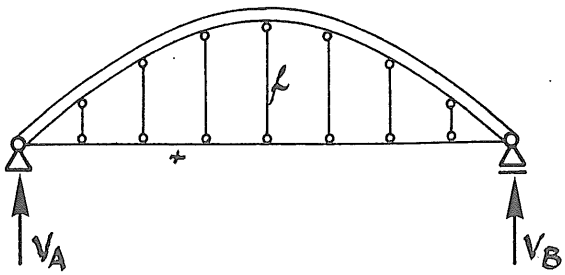
Versterkte balk

$V_A = V_B = \frac{gl}{2}$



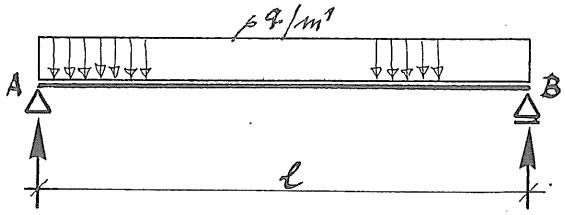
Op druk belaste boog

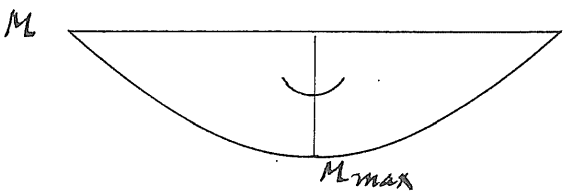
$V_A = V_B = \frac{gl}{2}$

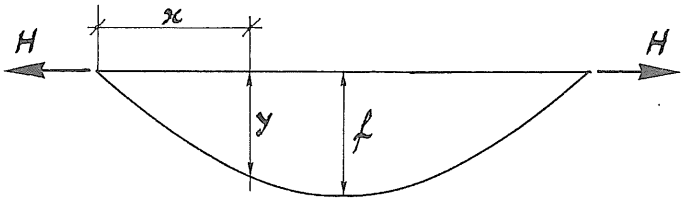


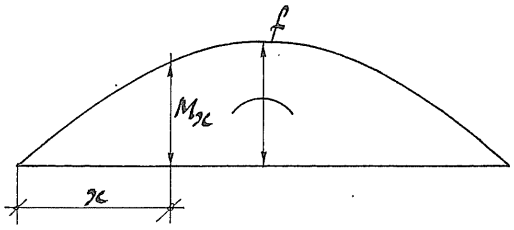
Boog met trekband

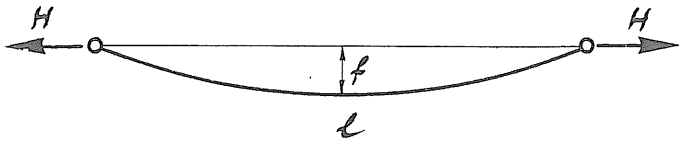
$V_A = V_B = \frac{gl}{2}$











Vergelijking met ligger

De M-lijn is parabolisch.

$M_{max} = \frac{q \times l^2}{8}$ $\qquad V_A = V_B = \frac{ql}{2}$

In de hiervoor getekende konstrukties - in de vorm van kabels en bogen - ontstaan bij de aangenomen belastingen in principe geen momenten in de konstruktie. Op de konstruktie werken in tegenstelling met de ligger naast vertikale oplegreakties ook horizontale oplegreakties.

De grootte van deze horizontale krachten kunnen we weer afleiden van de op buiging belaste ligger.

Door de horizontale krachten H worden er momenten op de konstrukties uitgeoefend met tegengesteld teken.

$M_x = H \times y$.

Omdat de figuren parabolisch zijn ontstaat er een paraboolvormige momentenlijn.

Omdat in de boogkonstruktie het moment overal nul is, moet bij het superponeren van beide momentenlijnen als voorwaarde gelden $M_{totaal} = 0$.

Uit $M_{max} = \frac{q \times l^2}{8}$ en $M_{max} = H \times f$ volgt de voorwaarde $H \times f = \frac{q \times l^2}{8}$ of $\boxed{H = \frac{ql^2}{8f}}$

We zien dus dat we de horizontale krachten H bij kabels en bogen kunnen afleiden uit de momenten van een ligger op twee steunpunten.

Toepassing bij aangenomen belasting van $q = 5$ kN/m¹ en $l = 12$ m

$$H = \frac{5 \times 12^2}{8 \times f} = \frac{90}{f}$$

Bij een gegeven belasting en overspanning is de horizontale kracht H uitsluitend te beïnvloeden door de pijl f.

Indien f groot is, is H klein.

Indien f klein is, is H groot.

Hieruit volgt dat we een kabel nooit horizontaal kunnen spannen. Door het eigen gewicht - hoe gering ook - ontstaat er altijd een moment.

Uit $H = \frac{q \times l^2}{8f}$

volgt indien $f = 0 \rightarrow H = \infty$

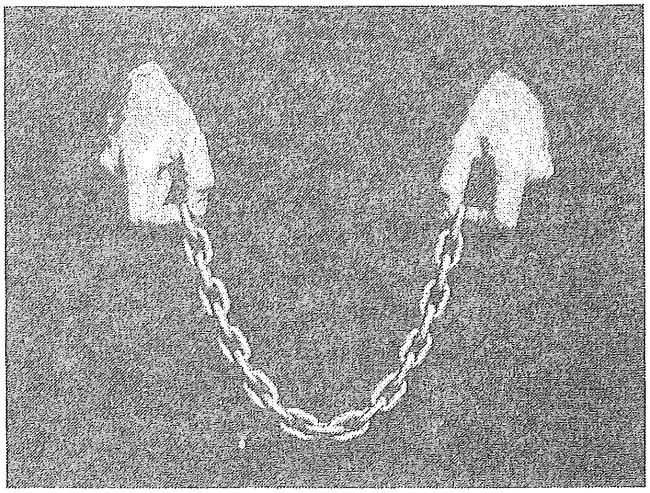
4. Druklijn en Treklijn

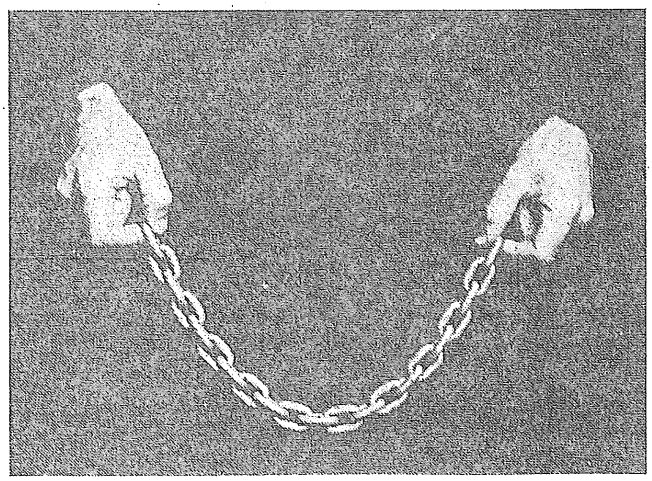
Met behulp van een poolfiguur hebben we bij de aangenomen belastinggevallen van puntlasten en gelijkmatig verdeelde belastingen stangenveelhoeken gekonstrueerd. Zo'n stangenveelhoek is een figuur, die aangeeft langs welke werklijnen krachten worden afgevoerd naar de oplegpunten. Bij elk belastinggeval behoort een eigen stangenveelhoek. Omdat stangenveelhoeken krachtenfiguren zijn wordt de vorm van de figuur volledig bepaald door de krachten. De enige variatie in de vorm is de hoogte van de stangenveelhoek (b.v. een parabool), die bepaald wordt door de poolafstand. Om krachten als normaalkrachten door een konstruktie over te brengen naar de oplegpunten moet de vorm van de konstruktie in overeenstemming zijn met de vorm van de stangenveelhoek. Zodra hiervan wordt afgeweken, ontstaan er in een konstruktie naast normaalkrachten ook buigende momenten.

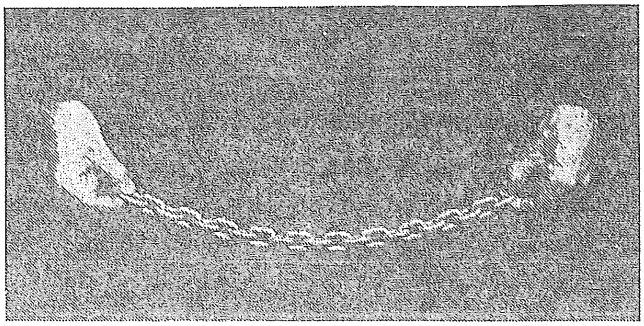
De volgorde is bij het konstrueren dan ook van kracht naar vorm.

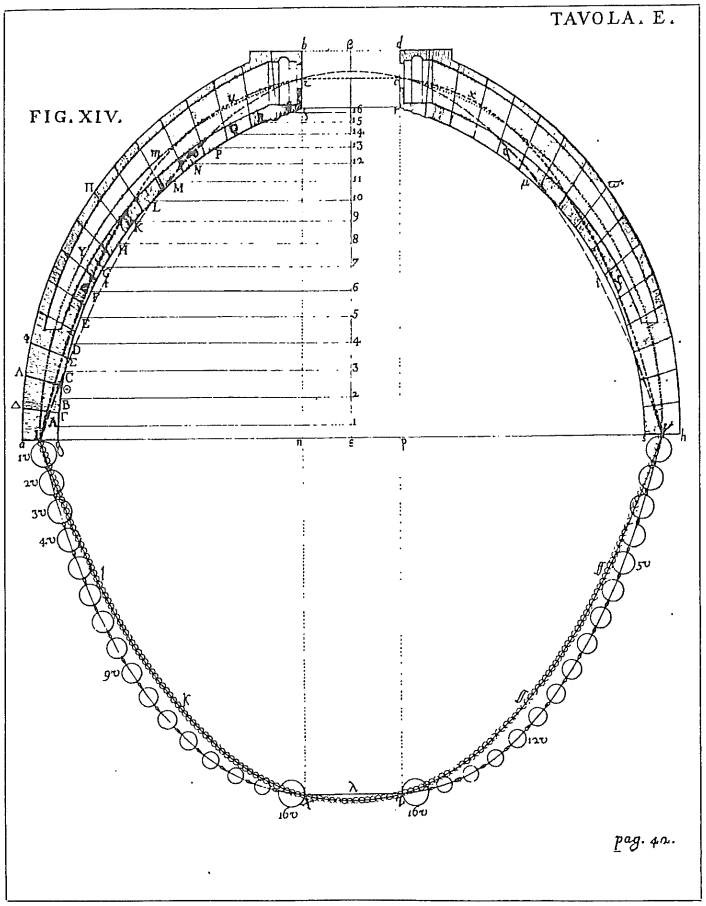
Zo'n stangenveelhoek noemen we bij in hoofdzaak op druk belaste elementen de druklijn en bij in hoofdzaak op trek belaste elementen de treklijn.

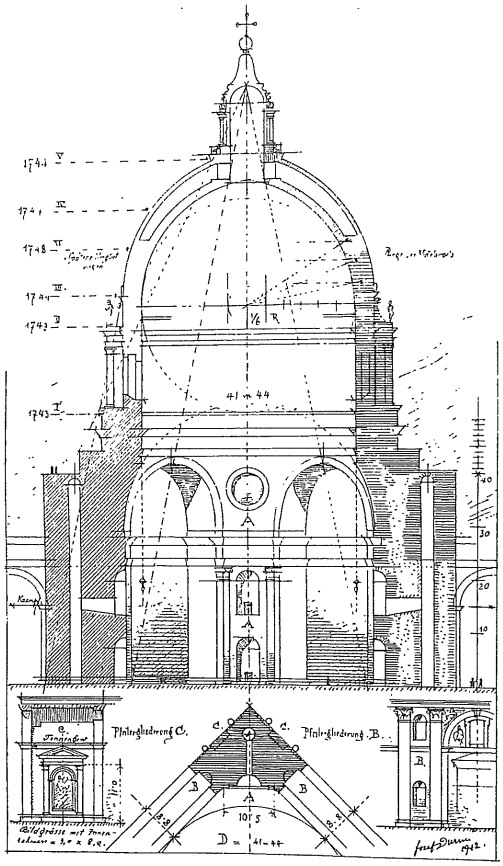
Druklijnen en treklijnen zijn identiek. Door de figuur van een treklijn te spiegelen om de horizontale as door de opleggingen krijgen we de druklijn; en omgekeerd ook zo. Indien we een kabel of ketting als konstruktie-element kiezen valt bij belasten de treklijn altijd samen met de staafas. Een kabel is immers buigslap, d.w.z. hij kan geen momenten opnemen. De vorm van de kabel past zich daarom aan aan de vorm van de treklijn. Het konstrueren van druklijnen met staven is veel ingewikkelder dan het konstrueren van treklijnen met kabels en kettingen. Omdat druklijnen en treklijnen identiek zijn is het daarom veel handiger om treklijnen te konstrueren. Uit de geschiedenis van de bouwtechniek zijn twee beroemde voorbeelden bekend van bouwmeesters die van dit gegeven gebruik maakten bij het onderzoek van bestaande konstrukties resp. het ontwerp van ingewikkelde boogvormige konstrukties.



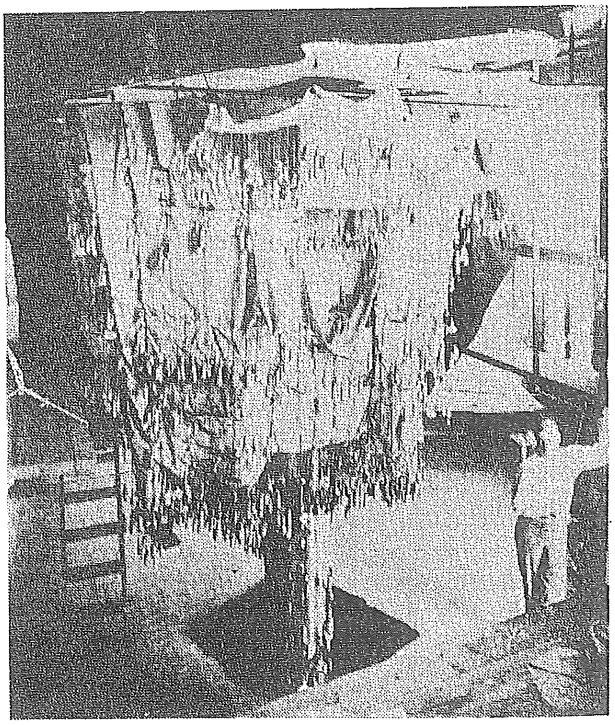


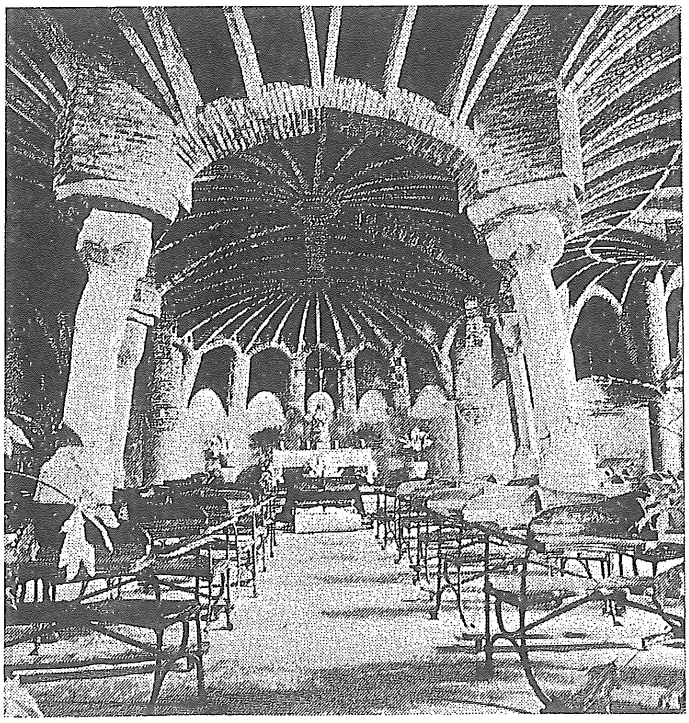






Poleni onderzocht m.b.v. een model van bollen aan een ketting in 1748 de problematiek van de scheurvorming in de koepel van de St. Pieter in Rome. Het gewicht van de bolletjes stemde nauwkeurig overeen met de massa van het korresponderende koepeldeel. Daardoor kon hij een analyse maken van de afwijking tussen de koepelvorm en de druklijn.

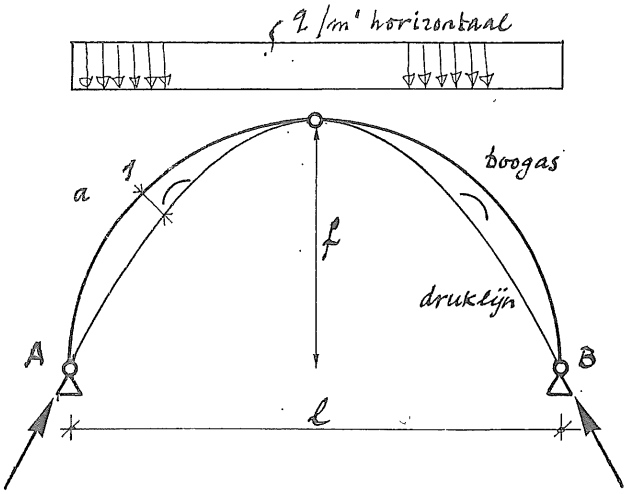




De bekende Catalaanse architekt Gaudí ontwierp met behulp van een driedimensionaal draadmodel de draagstruktuur van de kerk van Colonia Güell (niet voltooid).(ca 1910) Dit was een voorloper van de kathedraal "la Sagrada Familia" in Barcelona, waarvan de draagstruktuur echter op grafische wijze is bepaald.

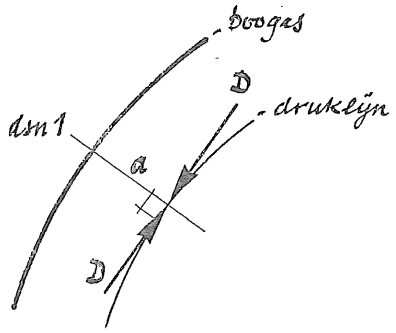
5. Relatie druklijn-momentenlijn

Een variant op het gevleugelde woord van de bekende Amerikaanse architekt Sullivan: "Form follows function" is in het kader van dit hoofdstuk: Form follows force".
In het voorgaande gedeelte van dit hoofdstuk is duidelijk gemaakt dat de krachten vormbepalend zijn voor de konstruktie. Opvallend is dat de geschiedenis van de bouwtechniek leert, dat vroeger veel meer dan tegenwoordig bovengenoemde regel werd gerespekteerd. Natuurlijk heeft dit te maken met de beperkingen van de materialen waarmee de bouwmeesters van vroeger rekening moesten houden. Ze beschikten immers slechts voornamelijk over bouwmaterialen als steen en hout. Tegenwoordig hebben we bij het konstrueren veel meer mogelijkheden in de keuze van konstruktiematerialen en de kennis erover. Daarnaast kunnen we - mede dankzij computers - konstrukties van te voren tot in de perfektie berekenen. Toch rijst de vraag of we met het moderne konstrueren ons niet te ver verwijderen van zo'n eenvoudige richtlijn als "Form follows force".
Om duidelijk te laten zien, welke de konsekwenties zijn, wanneer we afwijken van de door de krachten gewenste vorm van de konstruktie, gaan we voor een aantal konstruktiesystemen zowel de druklijn als de momentenlijn in beeld brengen. Overal waar de vorm van de konstruktie afwijkt van de druklijn zullen er naast drukkrachten tevens (veel materiaal vragende) momenten ontstaan. "Momenten" zijn a.h.w. strafpremies voor afwijkingen van het "rechte pad" (in dit geval de gebogen of geknikte druklijn).



Cirkelvormige boog

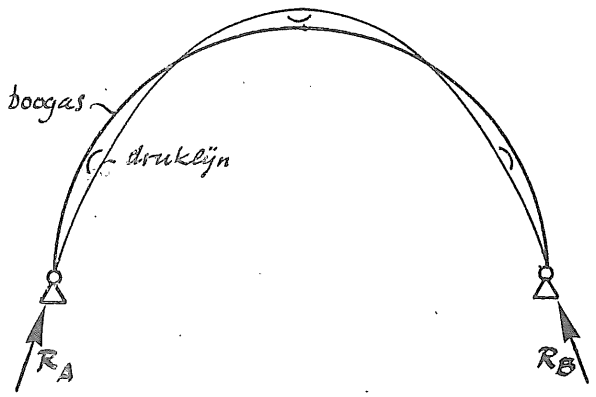
Een halfcirkelvormige boog met drie scharnieren wordt gelijkmatig verdeeld belast. De druklijn volgt de paraboolvorm, met als gevolg dat er in beide booghelften naast drukkrachten ook buigende momenten optreden. Voor doorsnede 1 geldt:



a = afstand boogas-druklijn

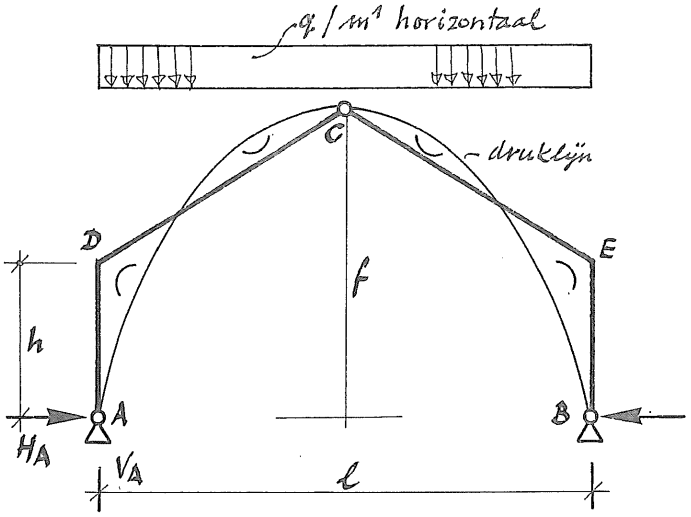
D = resultante van de krachten in doorsnede 1.

Het moment in de boogas is M = D . a



Opmerking: De top van de paraboolvormige druklijn gaat door het scharnier in C. Daar geldt immers de voorwaarde $M_C = 0$. Indien de boog wordt uitgevoerd met 2 scharnieren is deze statisch onbepaald. We kunnen dan niet stellen dat de top van de druklijn samenvalt met de top van de boog. Toch zijn zulke statisch onbepaalde konstrukties - wat betreft de momentenverdeling - gunstiger dan statisch bepaalde: konstrukties zoeken nl. bij belasten de weg van de minste weerstand. Dit is het geval als de top van de druklijn boven de top van de boog uitkomt.

In dit geval ontstaan er dus ook momenten in de top. De maximale momenten zullen echter kleiner zijn dan bij een boog met drie scharnieren.



Driescharnierspant

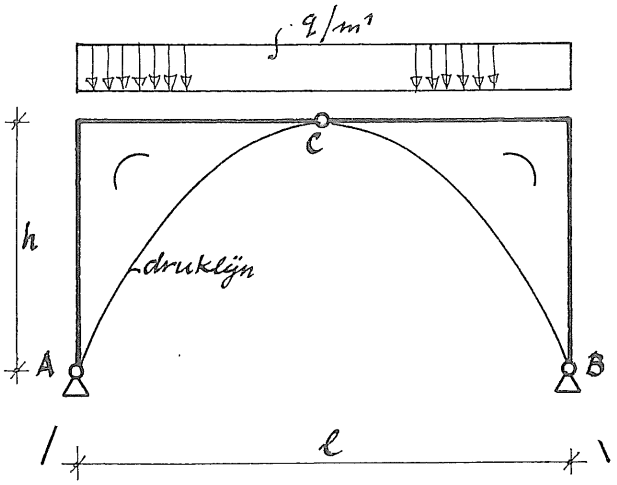
De paraboolvormige druklijn gaat door de scharnieren bij A, B en C.

$V_A = V_B = \frac{ql}{2}$

$H_A = H_B = \frac{ql^2}{8f}$

Bij D en E ontstaan (grote) buigende momenten in de konstruktie.

$M_D = M_C = H_A \times h$



Portaal met drie scharnieren - gelijkmatig verdeeld belast -

De paraboolvormige druklijn gaat weer door de scharnieren bij A, B en C.

$V_A = V_B = \frac{ql}{2}$

$H_A = H_B = \frac{ql^2}{8f}$

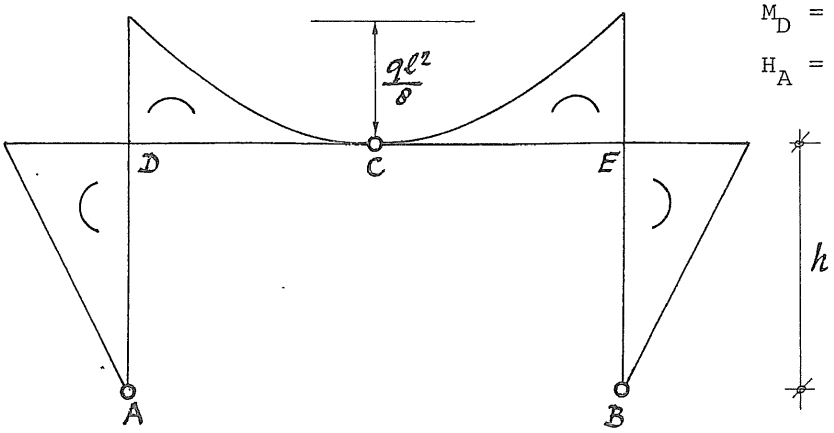
Bij D en E ontstaan (grote) buigende momenten in de konstruktie.

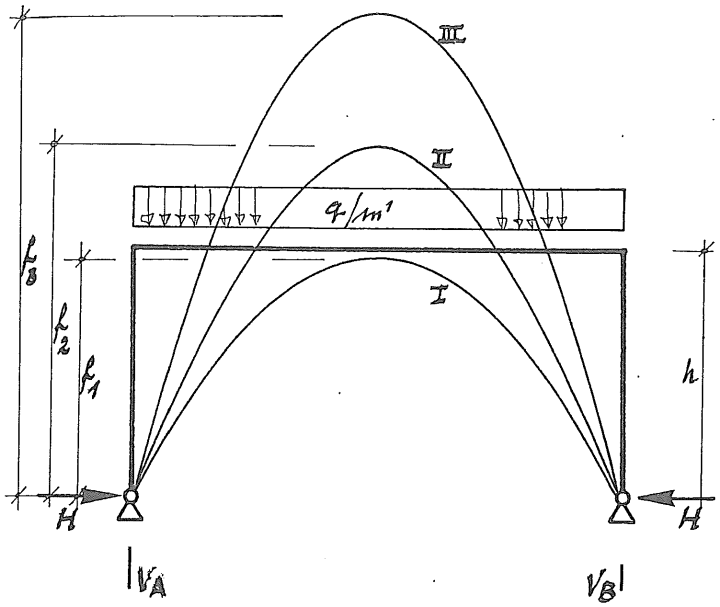
$M_D = M_E = H_A \times h$

Opmerking: M-lijn konstruktie.
Bij het hoofdstuk portalen hebben we de M-lijn als volgt uitgezet:

$M_D = M_E = H_A \times h = 1/8\ ql^2$

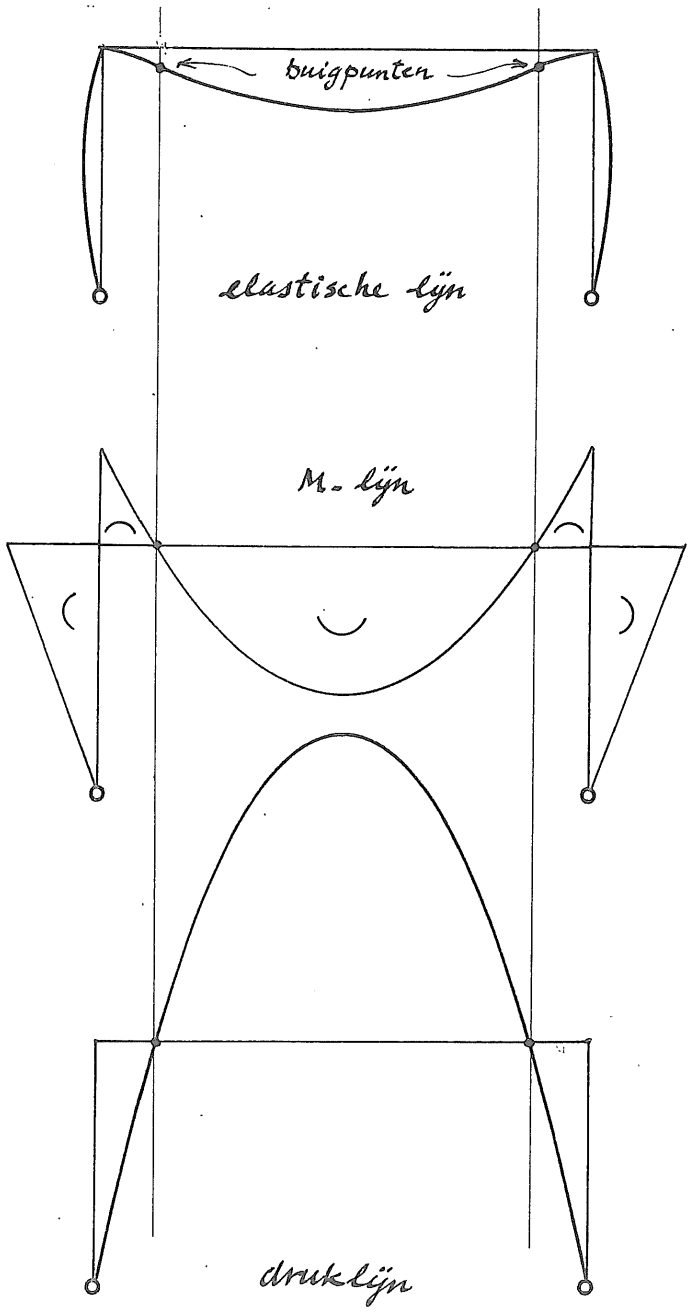
$H_A = \frac{ql^2}{8h} = \frac{ql^2}{8f}$





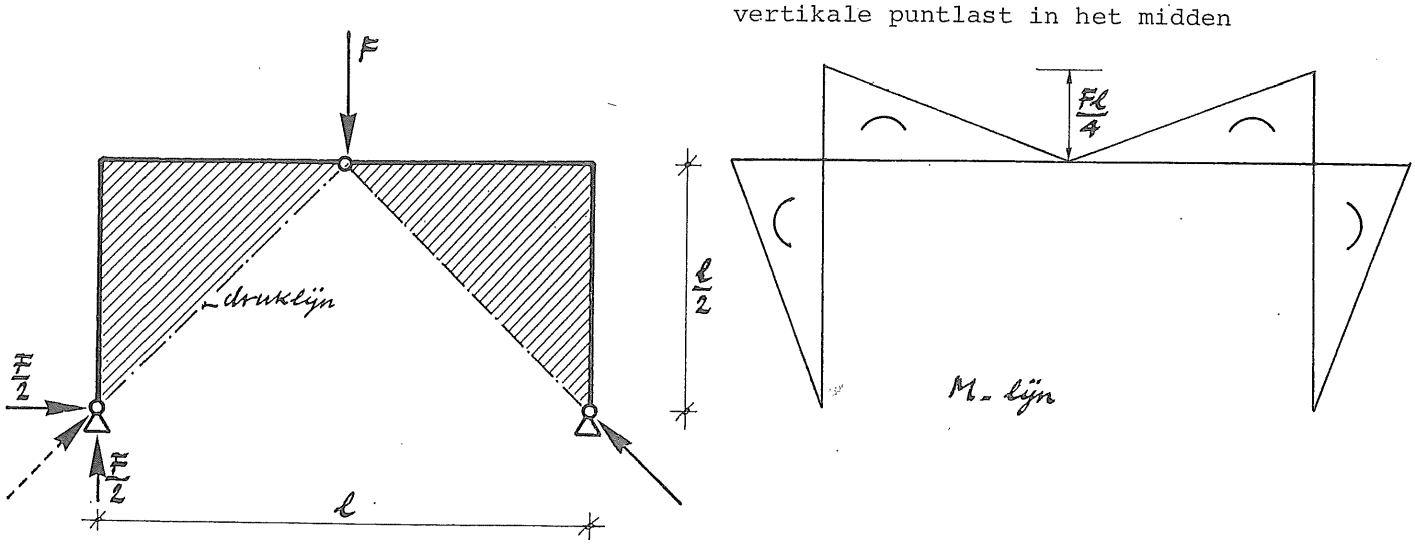
Portaal met 2 scharnieren - gelijkmatig verdeeld belast -

Dit portaal is statisch onbepaald. Het probleem is nu dat we niet weten hoe de druklijn moet worden getekend. Deze kan immers verschillende vormen hebben (I, II of III). Met de kennis van de elastische lijn kunnen we nagaan welke vormen het meest waarschijnlijk zijn.

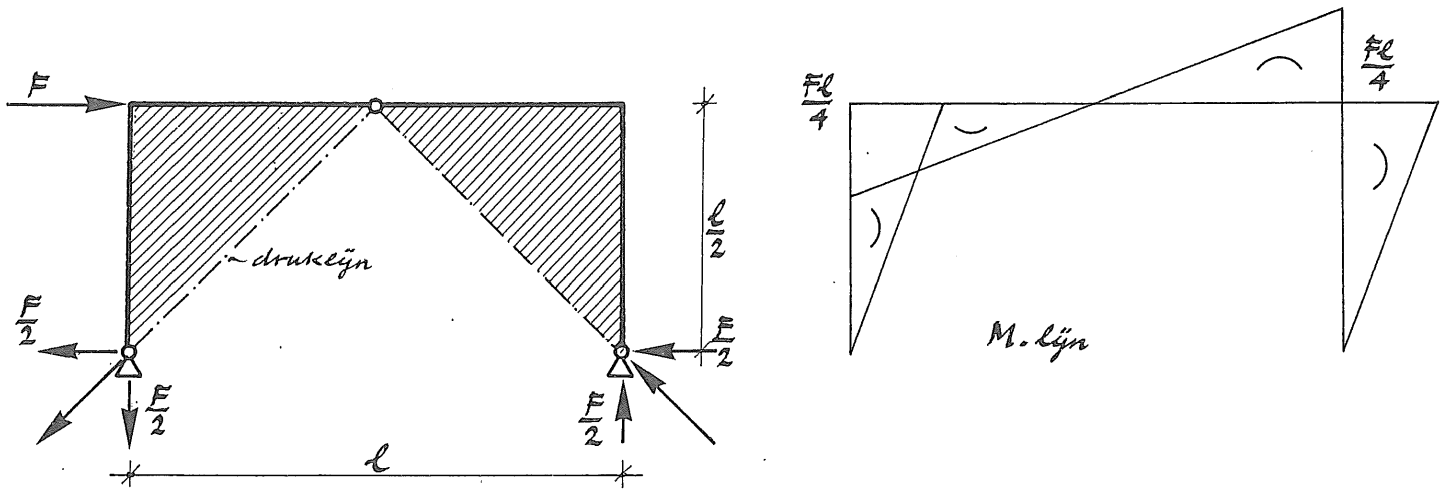


Omdat t.p.v. een buigpunt het moment nul is moet de druklijn bij deze punten de systeemlijn van de bovenregel van het portaal snijden. Druklijn I is dus uitgesloten. De keuze gaat dus tussen een druklijn volgens bijvoorbeeld II en III. Zoals bij statisch onbepaalde portalen is berekend zijn de momenten bij C en D afhankelijk van de stijfheidsverhoudingen van regel en stijlen, dus ook de plaats van de momentennulpunten.

Portaal met 3 scharnieren
vertikale puntlast in het midden

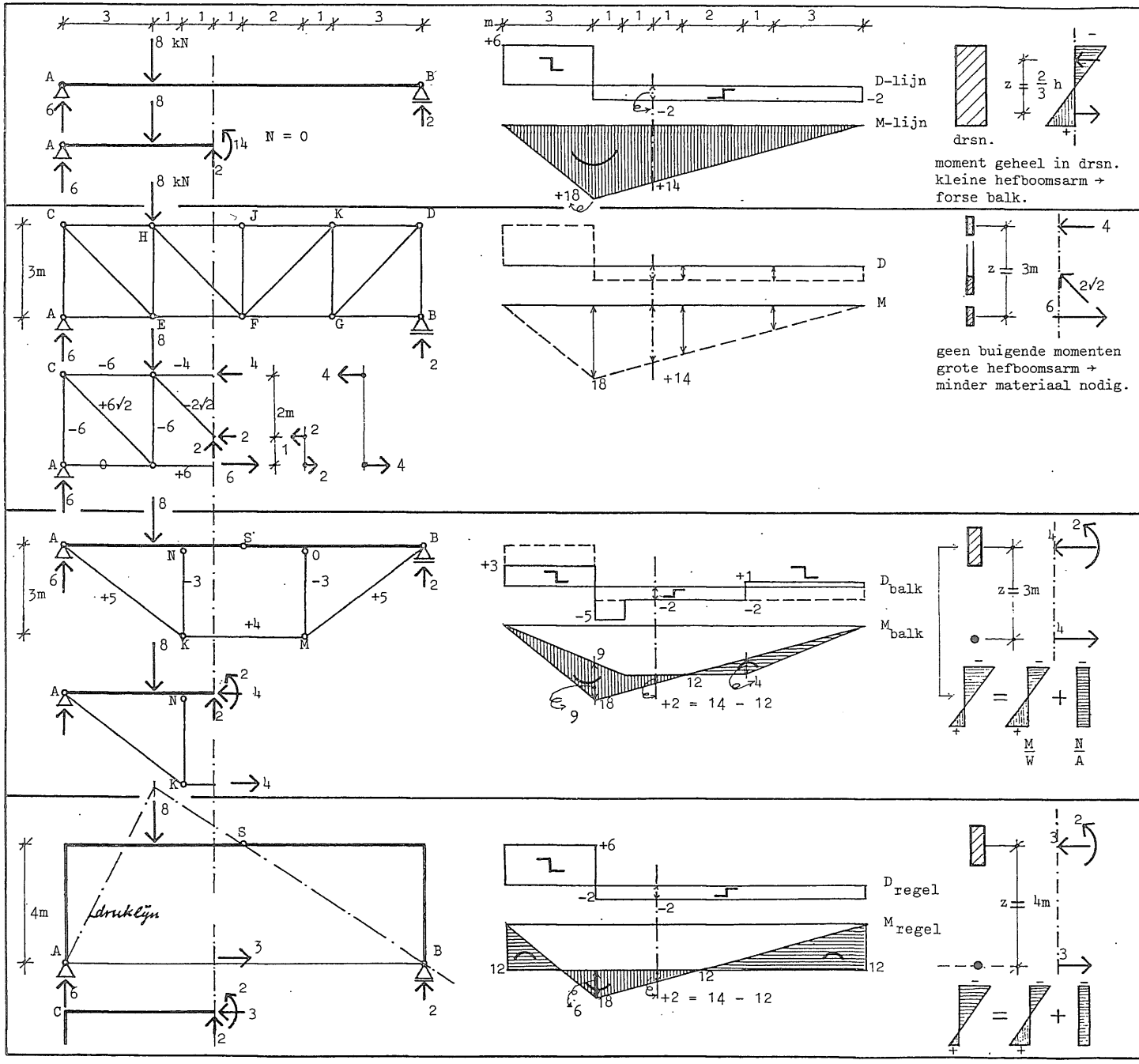


Portaal met 3 scharnieren
horizontale puntlast



6. Vergelijking van overspanningsvormen

Op de volgende pagina is in beeld gebracht, hoe een eenvoudig belastingsgeval op vier verschillende manieren kan worden vormgegeven en in schema gebracht. Bovenaan staat de basis-M-lijn, die overal voorkomt; naar gelang de hoogte van de konstruktie toeneemt, blijkt op verschillende manier een reducerend moment op te treden, waardoor de resulterende momentenlijn een stuk gunstiger wordt. De momentenreduktie wordt optimaal, als de vorm van de overspanningskonstruktie de oorspronkelijke M-lijn (≈ de druklijn) benadert.



BALK

berekening: $R_A = \frac{9}{12} \cdot 8 = 6$ kN → $R_B = 2$ kN

In doorsnede (op 5 m van A) werkt:
geen normaalkracht,
een dwarskracht D = 2 kN, afschuifteken ⎍,
een buigend moment M = 7 . 2 = 14 kNm,
buigteken ◡.

moment geheel in drsn.
kleine hefboomsarm →
forse balk.

VAKWERK

berekening: reaktiekrachten als boven

in doorsnede:

vertikale snede door FH:
$\Sigma V = 0 \rightarrow S_{FH_V} = 2$ kN (druk)

snede door HJ: ΣM_F rechterdeel = 0

$3 \cdot S_{HJ} = 6 \cdot R_B = 12 \rightarrow S_{HJ} = 4$ kN (druk)

snede door EF: ΣM_H linkerdeel = 0

$\rightarrow S_{EF} = 6$ kN (trek)

in de doorsnede werken uitsluitend staafkrachten, dus geen dwarskrachten en buigende momenten. Wel ontstaan er koppels, die het inwendig buigend moment leveren: 2 . 1 + 4 . 3 = 14 kNm!

geen buigende momenten
grote hefboomsarm →
minder materiaal nodig.

SPRINGWERK

berekening: uitwendige reakties als boven →
→ momentenlijn, waarin $M_S = 12$ kNm ◡

$\rightarrow S_{KM} = \frac{12}{3} = 4$ kN (trek)

→ normaalkracht in AS = 4 kN (druk)

$\Sigma V = 0$ → dwarskracht tussen N en O = 2 kN ⎍

M_{balk} t.p.v. doorsnede 2 . 1 = 2 kNm ◡

(of grafisch, met twee M-lijnen: M = 14 - 12 = 2)

totaal in doorsnede :

normaalkracht: + 4 - 4 = 0
dwarskracht : 2 kN ⎍
moment : + 2 + (koppel) 4 . 3 = 14 kNm ◡

3-SCHARNIERSPANT

berekening: R_{AV} en R_{BV} als boven.

ΣM_S rechterdeel = 0 → 4 . R_{BH} = 6 x 2 →

→ $R_{BH} = 3$ kN

(of via M-lijn: (rol in B + trekstang AB):
$M_S = 12 = S_{AB} \cdot 4$)

doorsnede:

in regel	totaal
N = 3 kN druk	N = - 3 + 3 = 0
D = 2 kN ⎍	D = 2 kN ⎍
M = 2 kNm ◡	M = 2 + (3 x 4) = 14 kNm ◡

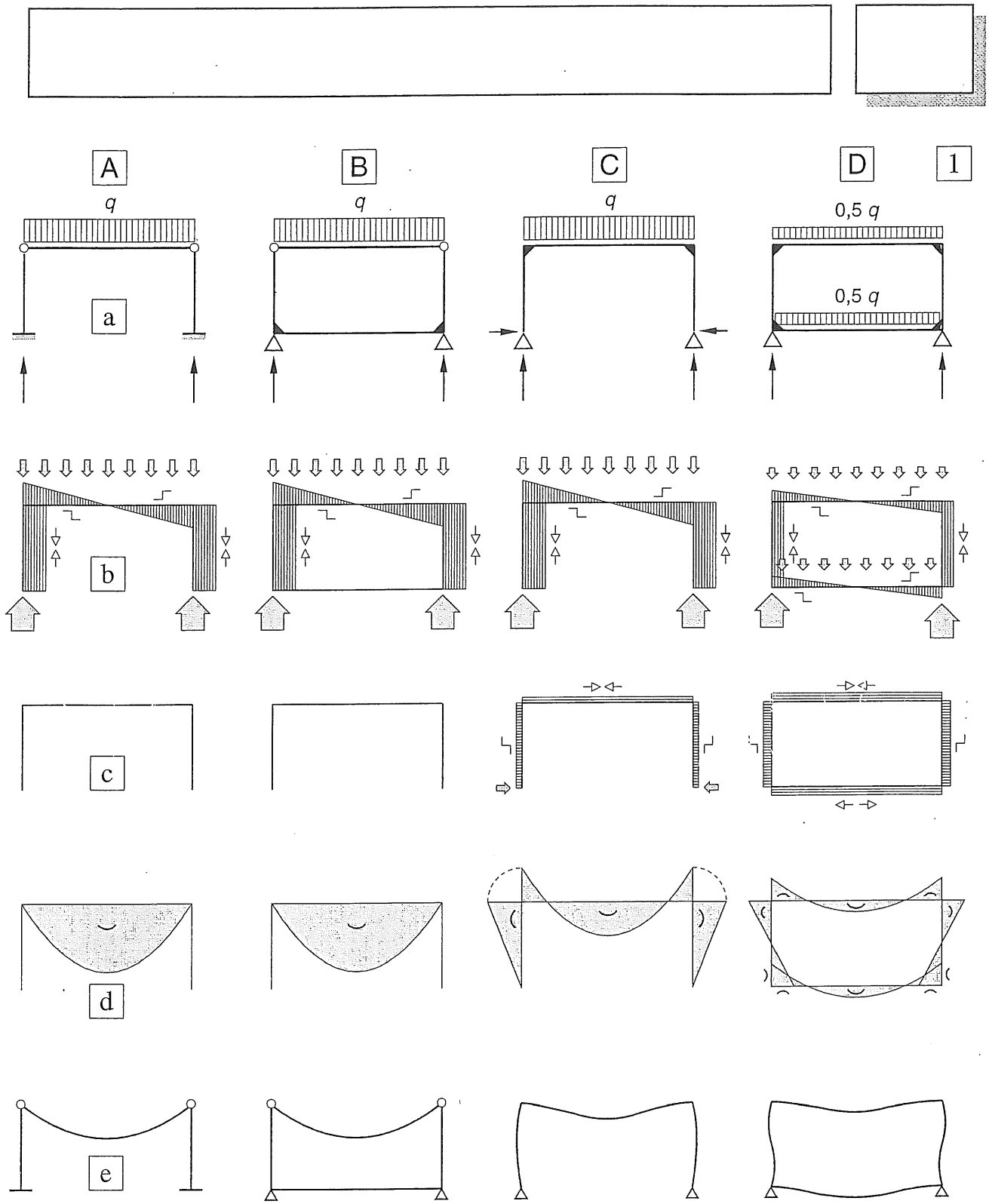


Fig. 1 Portalen A, B, C belast door een gelijkmatig verdeel de belasting op de bovenregel , en bi jportaal D de gehalveerde belasting op de boven- en onderregel

a. Schema met reactiekrachten

b. Verticale uitwendige krachten en reactiekrachten

– Diagrammen voor de *verticaal* werkende snedekrachten

c. Horizontale reactiekrachten

– Diagrammen voor de *horizontaal* werkende snedekrachten

d. Diagrammen voor de buigende momenten

e. Vervormingen

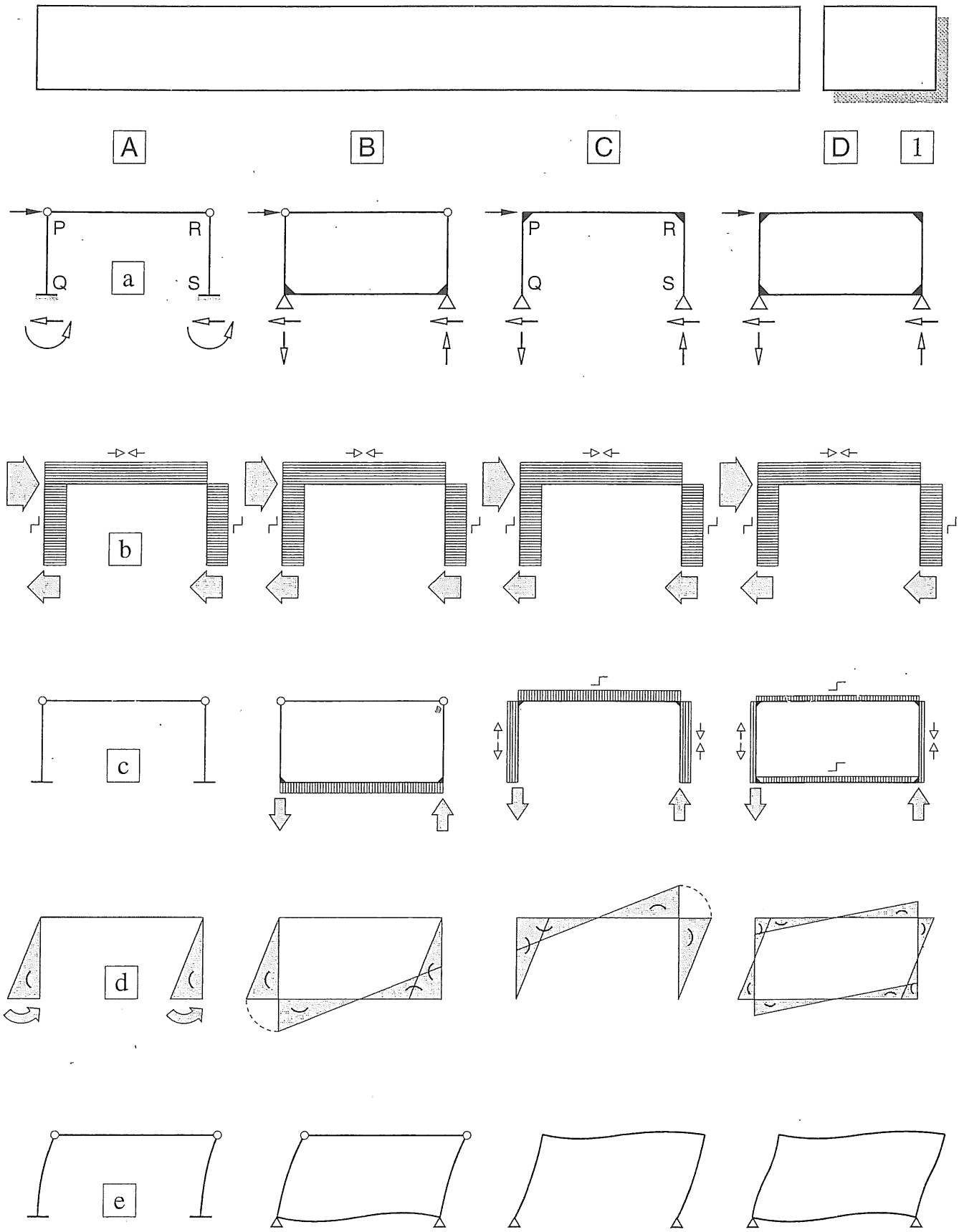


Fig. 1 Portalen A, B, C en D belast door een horizontale puntlast ter plaatse van de bovenregel

a. Schema met reactiekrachten

b. Horizontale uitwendige krachten en diagrammen voor de horizontaal werkende snedekrachten

c. Verticale uitwendige krachten en diagrammen voor de verticaal werkende snedekrachten

d. Uitwendig aangrijpende momenten en diagrammen voor de buigende momenten

e. Vervormingen