Het versterken en verstijven van bestaande constructies

ir.M.W. Kamerling,

m.m.v. ir.J.C. Daane

02-02-2015

Onderstempeling voor de renovatie van een kozijn in een gemetselde gevel, Woerden

Inhoudopgave

Inleiding
In het algemeen zal een gebouw gedurende de levensduur enige malen veranderen van eigenaar. Vooral in de utiliteitsbouw komt een verandering van functie vaak voor. In de loop van de tijd veranderen de eisen en normen, zodat, ook als de functie niet verandert, een bestaand gebouw aangepast zal moeten worden aan de nieuwe wensen en eisen. Vrijwel altijd gaat een renovatie gepaard met een aanpassing van de installaties en de afbouw en wellicht dat ook de draagconstructie zal moeten worden aangepast. Dit zal zeker het geval zijn als de belastingen worden verhoogd. In de praktijk wordt een gebouw meestal niet ontworpen op een hogere belasting om een latere verandering te vereenvoudigen. Een bestaande constructie zal meestal alleen een hogere belasting kunnen afdragen als deze wordt versterkt en/of verstijfd.

Plan van aanpak
Bij het versterken en verstijven van constructies wordt het ontwerp, de conditie, de veroudering en de krachtsafdracht van de bestaande draagconstructie geanalyseerd. Verder dient men de gewenste veranderingen en de daar uit voortkomende belastingtoename vast te stellen. Vervolgens zal men een ontwerp moeten maken voor de vernieuwde constructie.

Analyse van het ontwerp bestaande constructie
Onderzoek op welke belastingen de constructie is ontworpen, welke materialen zijn toegepast en de sterkte en stijfheid van de toegepaste materialen uitgaande van de toen gehanteerde normen en de huidige normen. Is de constructie in de loop van de tijd veranderd en/of uitgebreid en zijn deze veranderingen deskundig uitgevoerd?

Analyse van de conditie van de bestaande constructie
Inspecteer de conditie van de constructie en ga na of de constructieve elementen nog aanwezig en intact zijn. In de loop van de tijd kan een constructie verouderen of aangetast worden door bijvoorbeeld vocht, oxidatie of schimmelvorming. Bepaal het draagvermogen van de bestaande constructie in de huidige staat.

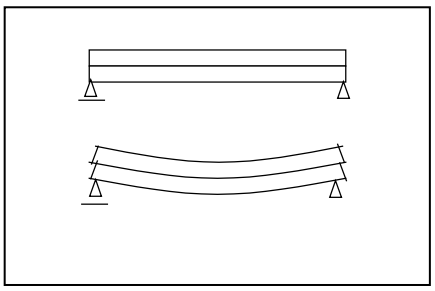
Analyse van de wensen ten aanzien van veranderingen en belastingen
Bepaal welke veranderingen en ingrepen in het gebouw gewenst zijn en bepaal de belastingen die uit deze wensen voortkomen.

Ontwerp vernieuwde constructie
Maak een ontwerp voor de krachtsdoorstroming van de vernieuwde constructie. Analyseer welke elementen (met inbegrip van de fundering) zwaarder worden belast en onderzoek hoe de zwaarder belaste elementen kunnen worden versterkt en/of verstijfd.

Aanbevelingen
In het algemeen zal men van groot naar klein werken. Analyseer de krachtsafdracht eerst op gebouwniveau en kijk dan naar de draagkracht van de elementen. Een extra belasting moet behalve door de direct belaste elementen ook door de ondersteunende constructies naar de ondergrond worden afgevoerd. Een ketting is zo sterk als de zwakste schakel. Ga na of alle constructieve elementen die betrokken zijn bij het afvoeren van een belastingverhoging de belastingen kunnen afvoeren naar de ondergrond.

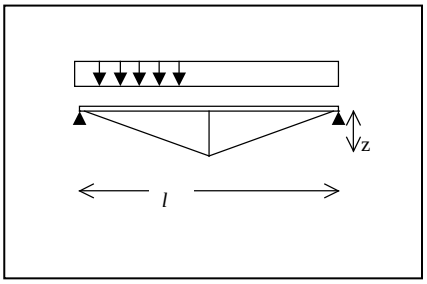
Versterken en verstijven van elementen
Een constructie kan worden versterkt door materiaal toe te voegen. In het verleden werd een houten balk versterkt door op de balk een tweede balk te leggen. De draagkracht van twee koud op elkaar gelegde balken is twee maal de enkele balk, evenzo neemt ook het eigengewicht van de verdubbelde balk met een factor 2 toe.

Figuur 1: Constructie met twee liggers koud op elkaar



Een doeltreffende maar ingrijpende maatregel is het versterken van een constructie met trek- en drukstaven, zodat een vakwerk of onderspannen constructie ontstaat, zie voorbeeld 2.

Figuur 2: Onderspannen ligger.



Om het draagvermogen van constructie te verhogen worden vaak de afmetingen van de doorsneden vergroot door elementen op de constructie te lijmen, te klemmen, te bouten of door materiaal toe te voegen door opstorten, aangieten of spuiten. De uitvoeringsmethode, het materiaal van zowel de oorspronkelijke constructie als de toevoeging is bepalend voor de wijze van versterken en verstijven.

- Staalconstructies kunnen worden versterkt met stalen platen, die op het oorspronkelijke profiel worden gelast.
- Houtconstructies kunnen worden versterkt met triplex platen, houten, stalen en koolstof lamellen.
- Betonconstructies kunnen worden versterkt met uitwendige voorspankabels, gewapend spuitbeton, gelijmde stalen strippen en gelijmde koolstof lamellen.

De wapening in een betonconstructie is bepalend voor het draagvermogen. In principe wordt een betonconstructie zo gewapend dat de belasting net kan worden opgenomen. Voor een betonnen ligger wordt het draagvermogen dan niet door de maximale drukspanning maar door de toegepaste wapening bepaald. De draagkracht van deze betonconstructies kan worden verhoogd door wapening toe te voegen. Dit kan door bijvoorbeeld strippen van staal of koolstof te lijmen op het oppervlak aan de getrokken zijde. De sterkte van de constructie neemt dan ongeveer 10% a 20% toe. De gelijmde strippen dragen echter weinig bij aan de stijfheid. Betonnen balken kunnen ook worden versterkt met gewapend spuitbeton. Bij benadering kan worden aangenomen dat de draagkracht min of meer evenredig toeneemt met de vermeerdering van de doorsnede, Het opgespoten beton moet uiteraard dan wel goed gewapend worden. Een betonvloer kan eenvoudig worden versterkt door op de geruwde vloer een betonnen druklaag te storten. Het eigen gewicht neemt dan ook toe. Een nadeel van de toegevoegde gestorte druklaag is dat dan het eigen gewicht en dus ook de belasting toeneemt. In de volgende voorbeelden wordt het effect van het versterken getoond.
In principe neemt het draagvermogen toe als het opneembare moment, de opneembare dwarskracht en/of de opneembare normaalkracht toeneemt. Aansluitend op het mechanica onderwijs wordt in de volgende voorbeelden uitgegaan van de lineaire elasticiteitstheorie. Voor een materiaal als beton is de wapening bepalend voor de draagkracht. Een gescheurde betonconstructie gedraagt zich niet lineair elastisch. In de praktijk worden geavanceerdere berekeningsmethoden gebruikt.

Lineaire elasticiteitstheorie

De lineaire elasticiteitstheorie gaat uit van een rechtlijnig verband tussen spanning en vervorming, als beschreven door Hooke: Zo de kracht zo de uitrekking. Uitgaande van de lineaire elasticiteitstheorie kunnen de spanningen door het moment, de dwarskracht of de normaalkracht als volgt worden bepaald voor een constructie met een doorsnede met een oppervlak A, een weerstandsmoment W, een elasticiteitsmodulus E en een kwadratisch oppervlakte moment I:

Moment: $\sigma = \frac{M}{W} \leq f_{db}$

Schuifspanning: $\tau = \frac{V \times S}{b \times I} \leq f_{dv}$

Voor een rechthoekige ligger: $\tau = \frac{1.5 \times V}{b \times h} \leq f_{dv}$

Trekkracht en buiging: $\sigma = \frac{N}{A \times f_{d\,trek}} +/- \frac{M}{W \times f_{db}} \leq f_d$

Drukkracht en buiging: $\sigma = \frac{N}{A \times f_{d\,druk}} +/- \frac{M}{W \times f_{db}} \frac{n}{(n-1)} \leq f_d$

n is het knikgetal, de verhouding van de knikkracht en de normaalkracht door de belasting:

$$n = N_{cr}/N$$

De knikkracht volgt uit: $N_{cr} = \pi^2 \times EI/l_c^2$

$f_{db.}$ = de rekenwaarde van de maximale buigspanning voor het gegeven materiaal.
$f_{dv.}$ = de rekenwaarde van de maximale schuifspanning voor het gegeven materiaal.
$f_{d\,trek}$ = de rekenwaarde van de maximale trekspanning voor het gegeven materiaal.
$f_{d\,druk}$ = de rekenwaarde van de maximale drukspanning voor het gegeven materiaal.

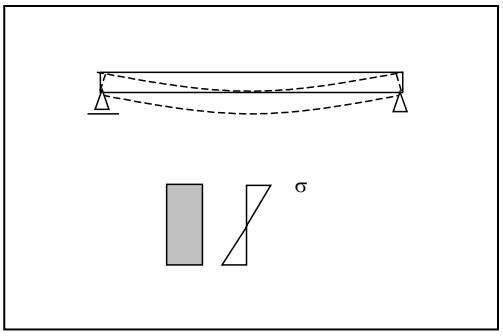
Uitgaande van de lineaire elasticiteitstheorie zal voor een symmetrische versterkte constructie de toename in draagkracht evenredig zijn met de toename van:

- het weerstandsmoment W voor het opneembare moment;
- het statisch moment gedeeld door breedte en kwadratisch oppervlakte moment, S/(b.I) voor de opneembare dwarskracht;
- het oppervlak A voor de draagkracht van een centrisch belaste gedrongen kolom waarvoor de knikkracht niet bepalend is;
- de stijfheid EI voor de draagkracht voor centrisch belaste slanke kolommen als de knikkracht bepalend is.

Als het toegevoegde materiaal een andere elasticiteitsmodulus heeft dan het oorspronkelijke materiaal dan moet het verschil in de berekening worden verdisconteerd.

Voorbeeld 1: Samengestelde balk

Een houten balk met een breedte b en een hoogte h heeft een overspanning *l*. Door de belasting ontstaat een moment: $M = {}^{1}/_{8}\, q \times l^2$



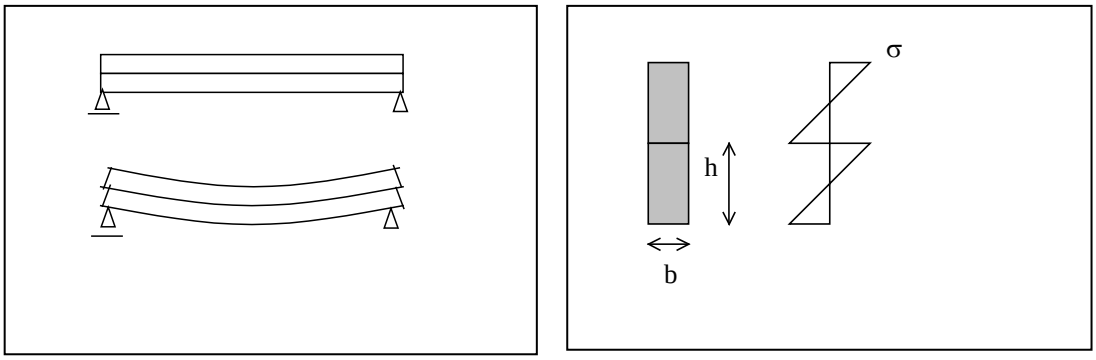
Figuur 3: Spanningen in een ligger

De spanning door dit moment is gelijk aan: $\sigma = M/W$

W is het weerstandsmoment van de doorsnede. Voor een rechthoekige doorsnede is het weerstandsmoment gelijk aan: $W = {}^{1}/_{6}\, b \times h^2$

De spanning door het moment moet kleiner zijn dan de maximale spanning:

$$\sigma = \frac{{}^{1}/_{8}\, q \times l^2}{{}^{1}/_{6}\, b \times h^2} < f_{db}$$



Figuur 4: Constructie met twee liggers koud op elkaar, in het contactvlak schuiven de liggers over elkaar.

De balk wordt maximaal belast. Stel dat men de belasting op de balk wil vergroten. Op de balk wordt een tweede balk gelegd. Beide balken zullen samen de totale belasting afdragen. Het weerstandsmoment van de beide baken is samen:
$W = 2 \times {}^{1}/_{6}\, b \times h^2$

De spanning door het moment is nu:

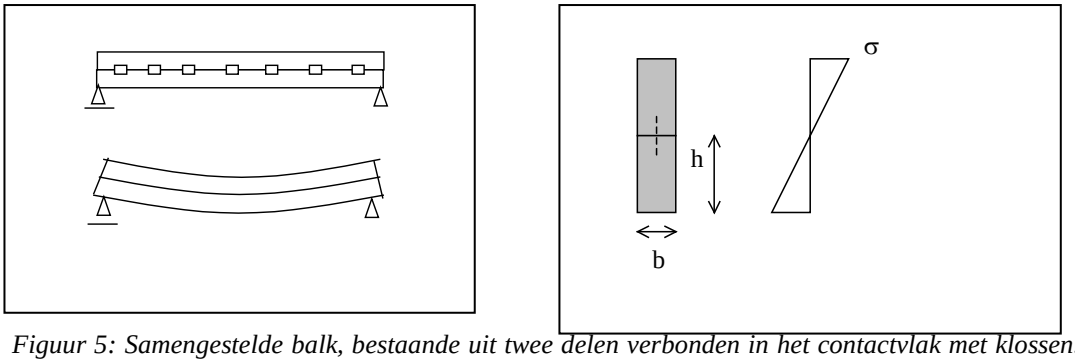
$$\sigma = ½ \times \frac{{}^{1}/_{8}\, q \times l^2}{{}^{1}/_{6}\, b \times h^2} < f_{db}$$

De spanning in de constructie met twee balken is een factor twee lager. De nieuwe opneembare belasting is tweemaal zo groot is als de belasting die één balk kan dragen.

Twee balken kunnen meer belasting dragen als deze balken goed met elkaar worden verbonden met klossen of een zaagtand in het contactvlak, zodat beide balken tot een geheel werden verbonden.

Het weerstandsmoment van de twee balken die volledig met elkaar zijn verbonden is gelijk aan: $W = {}^{1}/_{6}\, b \times (2\times h)^2$

Het opneembaar moment met deze constructie is 4 × zo groot als het moment opneembaar met de enkele balk. Om optimaal samen te werken moeten de balken zo met elkaar worden verbonden dat de balken in het contactvlak niet verschuiven.



Figuur 5: Samengestelde balk, bestaande uit twee delen verbonden in het contactvlak met klossen. De klossen verhinderen het verschuiven van de twee liggers in het contactvlak ten opzichte van elkaar.

De schuifspanning in de samengestelde constructie is volgt uit: $\tau = \dfrac{V\times S}{b\times I} \leq f_{dv}$

De maximale dwarskracht is gelijk aan: $V = ½\times q\times l$ Voor de rechthoekige samengestelde ligger is de schuifspanning in het contact vlak gelijk aan:

$$\tau = \frac{1.5 \times ½\, q\times l}{b\times(2\times h)} \leq f_{dv}$$

De verbindingsmiddelen moeten deze schuifspanning kunnen weerstaan.

Voorbeeld 2. Onderspannen ligger

Een gebouw ondergaat een bestemmingsverandering waardoor de belasting op een ligger wordt verdubbeld. Om de ligger te versterken en te verstijven wordt deze gesteund met een onderspanning. De ligger wordt dan in het midden gesteund met een drukstaaf, zodat de overspanning min of meer gehalveerd wordt en het draagvermogen sterk toeneemt. Het effect van de versterking wordt met een voorbeeld toegelicht.

<u>Gegevens</u>

De doorsnede van de ligger, met overspanning van l = 8 m, is gelijk aan 300 × 400 mm^2. De ligger wordt belast met een gelijkmatig verdeelde belasting q_d = 10 kN/m. De maximale buigspanning is gelijk aan f_{db} = 10 N/mm^2.

Het maximale moment in de ligger was: $M_d = q_d \times l^2/8 = 10 \times 8^2/8 = 80$ kNm

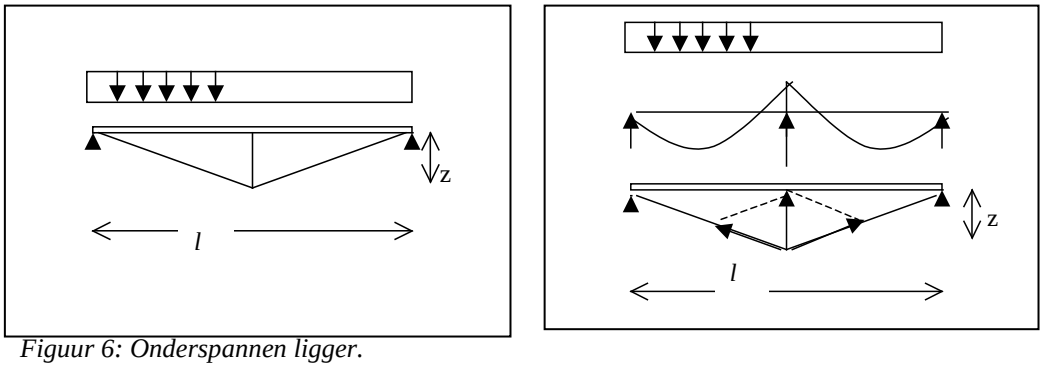
De oorspronkelijke spanning in de ligger was: $\sigma = M_d/W = \dfrac{80\times10^6}{300 \times 400^2/6} = 10 \leq 10$ N/mm^2

Door de bestemmingsverandering neemt de belasting toe tot q_d = 20 kN/m. De hoogte van de drukstaaf voor de versterkte constructie, halverwege de overspanning, is gelijk aan: z = 0.8 m.

<u>Versterking</u>

In de onderspannen ligger ontstaan trek en drukkrachten. De korte verticale staaf heeft een lengte van z = 0.8 m. De normaalkracht in de ligger volgt uit het momentenevenwicht halverwege de overspanning:

$N_d = M_d / z = q \times l^2/(8 \times z) = 20 \times 8^2/(8 \times 0.8) = 200$ kN



Figuur 6: Onderspannen ligger.

De drukstaaf steunt de ligger in het midden van de overspanning, de overspanning van de ligger wordt als het ware gehalveerd. Het moment in de ligger is bij benadering gelijk aan:

$M_d = 20 \times 4^2/8 = 40$ kNm

De spanning in de ligger door het moment en de drukkracht is gelijk aan:

$$\sigma = N_d / A + M_d / W = \frac{200 \times 10^3}{300 \times 400} + \frac{40 \times 10^6}{300 \times 400^2/6} = 1.7 + 5 = 6.7 < 10 \text{ N/mm}^2$$

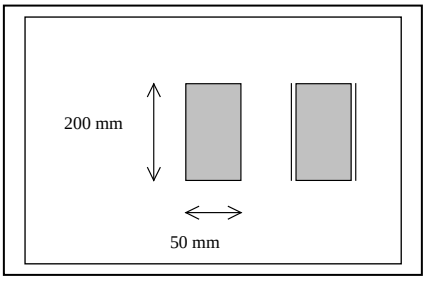
(exclusief tweede orde)

De spanning in de nieuwe constructie is lager dan de maximale spanning, de constructie voldoet. De belasting kan nog verder worden verhoogd. Ook kan de lengte van de drukstaaf halverwege de overspanning verkort worden. Door de trekstaven voor te spannen kan men zonodig ook de doorbuiging minimaliseren.

Voorbeeld 3. Houten balk versterkt met triplex platen

Een houten balk, C18, heeft een breedte van 50 mm en een hoogte van 200 mm. De constructiehoogte mag niet worden vergroot. De balk wordt versterkt met twee triplex platen, 19×200 mm^2, die met houtdraad bouten op de zijkanten worden bevestigd. Voor de eenvoud wordt de elasticiteitsmodulus van het triplex gelijkgesteld aan de elasticiteitsmodulus van het hout. In welke mate neemt de sterkte en stijfheid toe?

Figuur 7: De doorsnede van de onversterkte en de versterkte balk.



De doorsnede van de oorspronkelijke balk is gelijk aan: $A = b \times h = 50 \times 200 = 10000$ mm^2

De stijfheid van de oorspronkelijke balk is gelijk aan:

$EI_h = E_h \times b \times h^3/12 = E_h \times 50 \times 200^3/12 = E_h \times 33.3 \times 10^6$ Nmm^2

Het weerstandsmoment van de oorspronkelijke balk is gelijk aan:

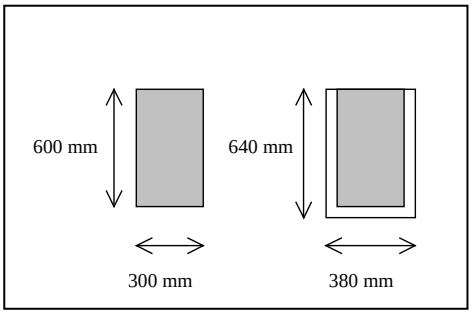
$W = b \times h^2/6 = 50 \times 200^2/6 = 0.33 \times 10^6\ mm^3$

Door het opdikken neemt de breedte toe met een factor (19+50+19)/50 = 1.76 toe. Daar zowel het oppervlak, de EI als het weerstandsmoment met een factor 1.76 toenemen, neemt ook de opneembare dwarskracht, de stijfheid en het opneembaar moment met een factor 1.76 toe.

Voorbeeld 4. Balk versterkt met gewapend spuitbeton

Een betonnen balk heeft een breedte van 300 mm en een hoogte van 600 mm. De betonkwaliteit is B25. Oorspronkelijk werd de balk berekend op een moment van M_d = 180 kNm. De balk wordt versterkt met een laag gewapend spuitbeton, dikte 40 mm, aangebracht op de zijkanten en de onderzijde. Voor de eenvoud nemen we aan dat de elasticiteitsmodulus van het spuitbeton gelijk is aan de elasticiteitsmodulus van het beton. Bepaal de toename van de draagkracht.

Figuur 8: De doorsnede van de onversterkte balk en de doorsnede van de versterkte balk



Oorspronkelijk werd de balk gewapend op een moment van 180 kNm. Eenvoudigheidshalve wordt niet de vereiste wapening bepaald maar wordt de opneembare spanning berekend met de lineaire elasticiteitstheorie. Het oorspronkelijke weerstandsmoment, het oorspronkelijke kwadratisch oppervlaktemoment en de spanning in de rechthoekige balk is volgens de lineaire elasticiteitstheorie:

Weerstandsmoment: $W = b \times h^2/6 = 300 \times 600^2/6 = 18.0 \times 10^6\ mm^3$

Kwadratisch oppervlakte moment: $I = b \times h^3/12 = 300 \times 600^3/12 = 5.4 \times 10^9\ mm^4$

De buigspanning volgt uit: $\sigma = M/W = 180 \times 10^6 / (18 \times 10^6) = 10\ N/mm^2$

In principe werd de oorspronkelijke balk zo gewapend dat deze spanning kan worden opgenomen. Door de versterking met spuitbeton worden de afmetingen van de doorsnede groter:

breedte: $b = 300 + 40 + 40 = 380$ mm
hoogte: $h = 600 + 40 = 640$ mm
Oppervlak: $A = 380 \times 640 = 24.32 \times 10^4\ mm^2$
Weerstandsmoment: $W = 380 \times 640^2/6 = 25.94 \times 10^6\ mm^3$
Kwadratisch oppervlaktemoment $I = 380 \times 640^3/12 = 8.3 \times 10^9\ mm^4$

Volgens de lineaire elasticiteitstheorie neemt opneembare moment evenredig toe met het weerstandsmoment. Het opneembare moment neemt nu toe met een factor:

$$W_{nieuw}/W_{oud} = 25.94 \times 10^6/(18 \times 10^6) = 1.44$$

De dwarskrachtcapaciteit neemt toe met een factor:

$$A_{nieuw}/A_{oud} = 24.32 \times 10^4 / (18 \times 10^4) = 1.33$$

De stijfheid neemt toe met een factor: $EI_{nieuw}/EI_{oud} = 8.3 \times 10^9/(5.4 \times 10^9) = 1.5$

De kleinste waarde is maatgevend, de belasting kan met een factor 1,33 worden verhoogd. Uiteraard moet het spuitbeton zo worden gewapend dat de dwarskrachten en trekspanningen kunnen worden opgenomen.

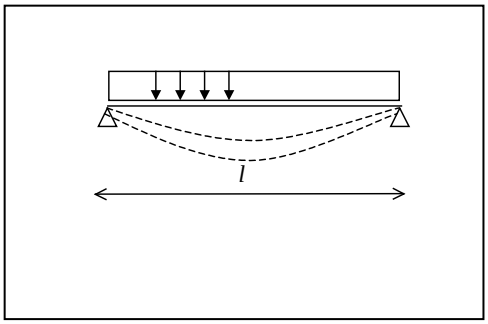
Voorbeeld 5 Verhoging van de belasting op een betonnen vloer
Een betonnen vloer heeft een overspanning van 6,0 m en een hoogte van 200 mm, de betonkwaliteit is C20/25. In verband met een bestemmingsverandering wil men de nuttige belasting verhogen. De vloer wordt geschematiseerd als een statisch bepaalde ligger opgelegd op een scharnier en rol.

Oorspronkelijk werd de vloer berekend op:

Eigen gewicht:	$p = 0.2 \times 24 =$	$4.8\ kN/m^2$
Afwerking:		$1.2\ kN/m^2$
Veranderlijke belasting:		$2.0\ kN/m^2$
Representatieve belasting:	$p_{rep} =$	$8.0\ kN/m^2$

Rekenwaarde oorspronkelijke belasting: $p_d = 1.5 \times (4.8 + 1.2) + 1.5 \times 2.0) = 12.0\ kN/m^2$

Figuur 9: Schema vloer



Tegenwoordig wordt de rekenwaarde bepaald met: $\gamma = 1.2$ voor de permanente en $\gamma = 1.5$ voor de veranderlijke. In welke mate neemt de draagkracht toe en wat is de opneembare veranderlijke belasting.
Rekenwaarde nieuwe permanente belasting: $p_{g\,d} = 1.2 \times (4.8 + 1.2) = 7.2\ kN/m^2$

Uitgaande van een maximaal opneembare belasting van $p_d = 12\ kN/m^2$ kunnen we nu de nieuwe veranderlijke belasting bepalen:
Rekenwaarde nieuwe permanente belasting: $p_{e\,d} = p_d - p_{g\,d} = 12.0 – 7.2 = 4.8\ kN/m^2$

Representatieve veranderlijke belasting: $p_{e\,rep} = p_{ed} /1.5 = 4.8/1.5 = 3.2\ kN/m^2$

De veranderlijke belasting kan ten aanzien van de sterkte toenemen van 2.0 naar $3.2\ kN/m^2$ oftewel met een factor 1.6. Uiteraard neemt door de belasting verhoging ook de doorbuiging toe.

<u>Berekening doorbuiging</u>

Eigen gewicht:	$p = 0.2 \times 24 =$	$4.8\ kN/m^2$
Afwerking:		$1.2\ kN/m^2$
permanente belasting:	$p_g =$	$6.0\ kN/m^2$
Veranderlijke belasting:		$3.2\ kN/m^2$

Representatieve belasting: $p_{rep} = 6.0 + 3.2 = 9.2\ kN/m^2$

De doorbuiging wordt berekend met: $u = \frac{5\times\ q\times l^4}{384\ EI} < 0.004\times l$

Vermoedelijk is de constructie gescheurd de elasticiteitsmodulus neemt dan sterk af, stel dat de door de scheurvorming de stijfheid zo afneemt dat gerekend kan worden met een elasticiteitsmodulus $E_t = 10000$ N/mm^2.

Kwadratisch oppervlakte moment: $I = b \times h^3/12 = 1000 \times 200^3/12 = 6.67 \times 10^8$ mm^4

Doorbuiging: $u = \dfrac{5 \times 9.2 \times 6000^4}{384 \times 10000 \times 6.67 \times 10^8} = 23 \text{ mm} < 0.004 \times 6000 = 24 \text{ mm}$

De vervorming voldoet

Voorbeeld 6. Versterking van een betonnen vloer met een druklaag
Een betonnen vloer heeft een overspanning van 6.0 m en een hoogte van 200 mm, de betonkwaliteit is C20/25. In verband met een bestemmingsverandering dient de nuttige belasting verhoogd te worden van 2.0 kN/m^2 naar 6.0 kN/m^2. De vloer wordt geschematiseerd als een statisch bepaalde ligger opgelegd op een scharnier en rol. Bepaal de benodigde versterking.
Oorspronkelijk werd de vloer berekend op:

Eigen gewicht:	$p = 0.2 \times 24 =$	4.8 kN/m^2
Afwerking:		1.2 kN/m^2
Veranderlijke belasting:		2.0 kN/m^2

Rekenwaarde oorspronkelijke belasting: $p_d = 1.5 \times (4.8 + 1.2 + 2.0) = 12.0$ kN/m^2

<u>Oorspronkelijk moment en buigspanning</u>
Voor een breedte van 1,0 m was het oorspronkelijk moment en de spanning gelijk aan:

Rekenwaarde moment: $M_d = q_d \times l^2/8 = 12.0 \times 6^2/8 = 54$ kNm.

Weerstandsmoment: $W = 1000 \times 200^2/6 = 6.66 \times 10^6$ mm^3

Oorspronkelijke buigspanning: $\sigma = M/W = 54 \times 10^6/(6.66 \times 10^6) = 8.1$ N/mm^2

<u>Nieuw moment en buigspanning</u>
Rekenwaarde nieuwe belasting: $p_d = 1.2 \times (4.8 + 1.2) + 1.5 \times 6.0 = 16.2$ kN/m^2

Voor een breedte van 1,0 m is het nieuwe moment en de spanning gelijk aan:

$$M_d = q_d \times l^2/8 = 16.2 \times 6^2/8 = 72.9 \text{ kNm.}$$

$$\sigma = M_d/W = 72.9 \times 10^6/(6.66 \times 10^6) = 10.9 \text{ N/mm}^2$$

De draagkracht moet toenemen met een factor: 72.9/54 = 1,35. Met lamellen is een draagkrachtverhoging van 10% a 20% te realiseren. De vloer wordt versterkt met een druklaag. Door de vloer te verhogen neemt het weerstandsmoment als de belasting toe.

Figuur 10: Stort van de druklaag

Versterkte vloer
De vloer wordt versterkt met een druklaag van 50 mm, de nieuwe hoogte is nu h = 250 mm.

Eigen gewicht:	$p = 0.25 \times 24 =$	$6.0\ kN/m^2$
Afwerking:		$1.2\ kN/m^2$
Veranderlijke belasting:		$6.0\ kN/m^2$
Representatieve belasting, p_{rep} =		$13.2\ kN/m^2$

Rekenwaarde belasting: $p_d = 1.2 \times (6.0 + 1.2) + 1.5 \times 6.0 = 17.6\ kN/m^2$

Rekenwaarde moment: $M_d = q_d \times l^2/8 = 79.2$ kNm.

$$W = 1000 \times 250^2/6 = 10.4\times10^6\ mm^3$$

$$\sigma = M/W = 79.2 \times 10^6/(10.4\times10^6) = 7.6\ N/mm^2 < 8.1\ N/mm^2$$

De spanning is lager dan de oorspronkelijke spanning, de constructie voldoet qua sterkte. Door de verhoging neemt ook de stijfheid toe. Volgens de lineaire elasticiteitstheorie neemt de stijfheid toe met een factor: EI_{nieuw}/EI_{oud}

$$I_{nieuw} = b\times h^3/12 = 1000 \times 250^3/12 = 13 \times 10^8\ mm^4$$
$$I_{oud} = b\times h^3/12 = 1000 \times 200^3/12 = 6.7 \times 10^8\ mm^4$$

De stijfheid neemt toe met een factor $EI_{nieuw}/EI_{oud} = 13\times10^8/(6.7\times10^8) = 1.9$

De representatieve belasting neemt toe met een factor: (6.0 +1.2+ 6.0)/(4.8+1.2+2.0) = 1.65

De verhoging van de stijfheid is groter dan de vergroting van de belasting, zodat de vervorming niet zal toenemen. De berekening met de lineaire elasticiteitstheorie is echter aanzienlijk vereenvoudigd. In de praktijk zal men met de wapening en met krimp en kruip rekening moeten houden. Vermoedelijk is de constructie gescheurd de elasticiteits-modulus neemt dan sterk af, stel $E_{ct} = 7500\ N/mm^2$.

Doorbuiging: $w = \dfrac{5\times q\times l^4}{384\ EI} < 0.004\times l$

$$w = \frac{5 \times 13.2 \times 6000^4}{384 \times 7500 \times 13 \times 10^8} = 23\ mm < 0.004 \times 6000 = 24\ mm$$

De vervorming voldoet net

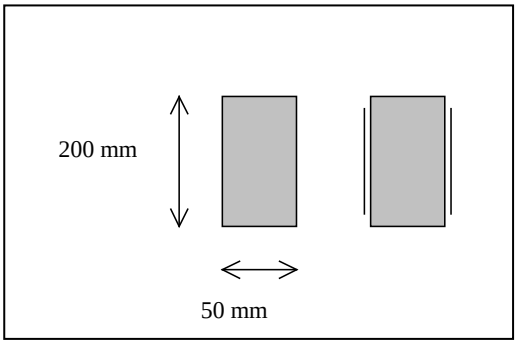
Voorbeeld 7: Houten balk versterkt met stalen platen aangebracht op de zijkanten.
Een houten balk, C18, heeft een breedte van 50 mm en een hoogte van 200 mm. Oorspronkelijk werd de balk berekend op een moment van $M_d = 2$ kNm. De spanning is dan gelijk aan $6\ N/mm^2$.

$$W = 50\times200^2/6 = 33.3\times10^4\ mm^3$$

$$\sigma = M/W = 2 \times10^6/(33.3\times10^4) = 6\ N/mm^2$$

De balk wordt versterkt met twee stalen platen $2 \times 180\ mm^2$, S235, welke op de zijkanten worden bevestigd met houtdraadbouten. De elasticiteitsmodulus van het staal is gelijk aan: $E_s = 2.1\times10^5\ N/mm^2$.

Figuur 11: De doorsnede van de onversterkte balk en de doorsnede van de versterkte balk.



De staalplaten zijn veel stijver dan het hout. Bovendien neemt door kruip de stijfheid van het hout af. Rekening houdend met kruip wordt gerekend met een verlaagde elasticiteitsmodulus gelijk aan: $E_h = 7000$ N/mm^2. In welke mate neemt de sterkte en stijfheid toe?

De stijfheid van de oorspronkelijke constructie is gelijk aan:

$$EI_h = E_h \times b \times h^3/12 = E_h \times 50 \times 200^3/12 = E_h \times 33.3 \times 10^6 \ \text{Nmm}^2$$

De stijfheid van de stalen platen is gelijk aan:

$$EI_s = E_s \times b \times h^3/12 = E_s \times 2 \times 2 \times 180^3/12 = E_s \times 1.944 \times 10^6 \ \text{Nmm}^2$$

De stalen platen zijn symmetrisch op de balk gelijmd, het zwaartepunt van de stalen platen is gelijk aan het zwaartepunt van de houten balk. De totale stijfheid van de balk wordt:

$$EI = EI_h + EI_s = E_h \times 33.3 \times 10^6 + E_s \times 1.944 \times 10^6$$

Om de berekening te vereenvoudigen wordt de gelijkwaardigheidcoëfficiënt m, de verhouding van de elasticiteitsmodulus van het staal en de elasticiteitsmodulus van het hout, ingevoerd:

$$m = E_s/E_h = 2.1 \times 10^5/7000 = 30$$

$$EI = EI_h + EI_s = E_h \times 33.3 \times 10^6 + 30 \times E_h \times 1.944 \times 10^6 = E_h \times 91.6 \times 10^6 \ \text{Nmm}^2$$

De stijfheid van de balk neemt toe met een factor: 91.6/33.3 = 2.75

De spanning in de uiterste vezels van het hout, aan de boven en onderzijde, volgt uit:

$$\sigma = \frac{M \times z \times E_h}{EI} = \frac{M \times 100 \times E_h}{E_h \times 91.6 \times 10^6} = \frac{M}{0.916 \times 10^6} \quad \text{N/mm}^2$$

De oorspronkelijke balk kon een spanning van 6 N/mm^2 weerstaan. Het opneembare moment van de versterkte constructie is dan:

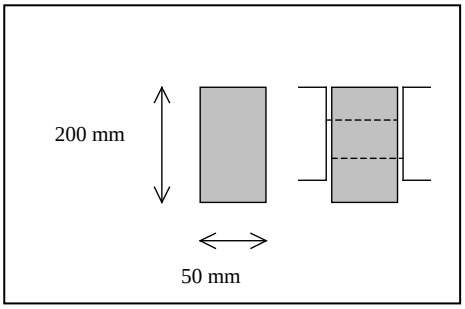
$$M_u = 6 \times 0.916 \times 10^6 = 5.5 \times 10^6 \ \text{Nmm} = 5.5 \ \text{kNm}.$$

Het opneembare moment neemt toe met een factor: $M_u / M_d = 5.5/2.0 = 2.75$

Uitgaande van het moment $M_u = 5.5$ kNm, is de spanning in de stalen platen gelijk aan:

$$\sigma = \frac{M_u \times z \times m \times E_h}{EI} = \frac{5.5 \times 10^6 \times 90 \times 30 \times E_h}{E_h \times 91.6 \times 10^6} = 163 < 235 \text{ N/mm}^2$$

Figuur 12: Om de uitvoering te vereenvoudigen kan men ook de ligger versterken met twee stalen U-profielen. De houten balk wordt dan alleen gebruikt om de belasting naar de staalprofielen over te brengen.

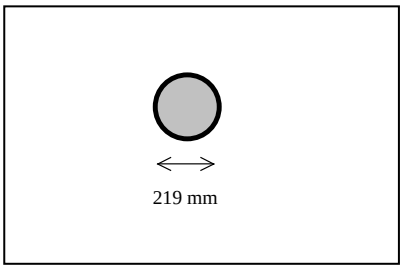


Het staal draagt een aanzienlijk deel van de belasting af. Door het staal wordt de constructie een stuk zwaarder, dit is in de berekening nog niet meegenomen.

Voorbeeld 8: Stalen buis gevuld met beton

Een stalen kolom heeft een doorsnede van rond 219 mm^2, dikte 5 mm, S235. De elasticiteitsmodulus van het staal is gelijk aan $E_s = 2.1 \times 10^5$ N/mm^2. De kolom is erg slank, de kniklengte is gelijk aan $l_c = 6$ m. De kolom wordt centrisch belast met een normaalkracht van $N_d = 270$ kN.

Figuur 13. Doorsnede van een stalen buis gevuld met beton



De kolom wordt gevuld met beton C20/25. De elasticiteitsmodulus van de betonvulling is minder dan de elasticiteitsmodulus van het staal, bovendien neemt door kruip de stijfheid van het beton af. Stel dat door de kruip de elasticiteitsmodulus van het beton afneemt tot E_{ct} = 10000 N/mm^2. Bereken voor de versterkte kolom de opneembare belasting.

Eerst wordt de spanning in de kolom bepaald voor de oorspronkelijke, niet gevulde doorsnede.

Profielgegevens: diameter: $d = 219$ mm
dikte: $t = 5$ mm

Oppervlak: $A = \pi/4 \times d^2 - \pi/4 \times (d-2t)^2 =$
$A = \pi/4 \times (219^2 - 209^2) = 3361$ mm^2

Kwadratisch oppervlakte moment: $I = \pi \times d^4/64 - \pi \times (d-2t)^4/64$
$I = \pi \times 219^4/64 - \pi \times 209^4/64 = 19.25 \times 10^6$ mm^4

Weerstandsmoment: $W = I/z = 19.25 \times 10^6/109.5 = 17.6 \times 10^4$ mm^3

De spanning in de kolom is gelijk aan: $\sigma_s = N_d/A_s = 300 \times 10^3/3361 = 89$ N/mm^2

De stijfheid van de kolom is gelijk aan: $EI = 2.1 \times 10^5 \times 19.25 \times 10^6 = 4.04 \times 10^{12}$ Nmm^2

De kolom wordt met een centrische normaalkracht belast.

De knikkracht volgt uit:

$$N_{cr} = \pi^2 \times EI/l_c^2 = \pi^2 \times 4.04 \times 10^{12}/6000^2 = 1107.6\times10^3 \text{ N}$$

Het knik getal is gelijk aan n = 1107.6/270 = 4.1 < 5

Door de kolom te vullen met beton neemt de brandwerendheid, de stijfheid en het draagvermogen toe.
Het oppervlak van de betonvulling is gelijk aan: $A = \pi\times (d-2t)^2/4 = \pi\times209^2/4 = 34306 \text{ mm}^2$

Het oppervlak van de vulling is ongeveer 10 maal zo groot als het oppervlak van de staaldoorsnede, maar dit betekent niet dat het draagvermogen met een factor 10 toeneemt. De elasticiteitsmodulus van de betonvulling is veel kleiner dan de elasticiteitsmodulus van het staal, zodat de toename van het draagvermogen klein is. Voor een langdurig belaste constructie moet ook met de kruip van het beton rekening gehouden worden. Stel dat voor een droog milieu door de kruip de elasticiteitsmodulus afneemt tot: $E_{bt} = 10000 \text{ N/mm}^2$.

De verhouding van de elasticiteitsmodulus van het staal en het beton is gelijk aan:

$$m = 210000/10000 = 21$$

De stijfheid van de samengestelde constructie volgt uit:

Stijfheid staal:	$EI_s = E_s \times I_s = m \times E_{ct} \times 19.25\times10^6 =$	$E_{ct} \times 404.3 \times 10^6 \text{ Nmm}^2$
Stijfheid betonvulling:	$EI_{ct} = E_{ct} \times I_b = E_{ct}\times\pi\times(d-2t)^4/64 =$	$E_{ct} \times 93.7 \times 10^6 \text{ Nmm}^2$
Beton + staal:	$EI_{ct} + EI_s =$	$E_{ct} \times 498 \times 10^6 \text{ Nmm}^2$

De stijfheid neemt toe met een factor: $(EI_{ct} + EI_s)/EI_s = 4.98 \times 10^{12}/ (404.3\times10^{12}) = 1.23$

Het knikgetal neemt toe tot: $n = 1.23 \times 4.1 = 5$

De spanning in het beton en staal wordt als volgt berekend. De constructie is samengesteld uit twee verschillende materialen. De doorsnede wordt centrisch door een normaalkracht belast, zodat de specifieke vervorming ε voor beide doorsneden gelijk is.

De kracht in het beton is: $N_c = A_c\times \sigma_{ct} = A_c\times E_{ct} \times \varepsilon$
De kracht in het staal is: $N_s = A_s\times \sigma_s = A_s \times m \times E_{ct.} \times \varepsilon$

De opneembare belasting volgt uit het evenwicht: $N_c + N_s = N_d$

$$E_{ct.} \times A_c \times \varepsilon + m\times E_{sct.} \times A_s \times \varepsilon = N_d \quad => \quad E_{ct} \times \varepsilon \times (A_c + m\times A_s) = N_d$$

Met $m = E_s / E_{ct} = 21$ en $N_d = 270$ kN vinden we:

$$10000 \times \varepsilon \times (34306 + 21 \times 3361) = 270000 \text{ N} \quad => \quad \varepsilon = 0.2574\times10^{-3}$$

De spanningen in het staal en beton volgen uit de wet van Hooke: $\sigma = E \times \varepsilon$

Beton: $\sigma_{ct} = E_{ct} \times \varepsilon = 10000 \times 0.2574 \times 10^{-3} = 2.6 \text{ N/mm}^2 < f_b = 13.3 \text{ N/mm}^2$

Staal: $\sigma_s = E_s \times \varepsilon = 2.1 \times 10^5 \times 0.2574 \times 10^{-3} = 54 \text{ N/mm}^2 < f_s = 235 \text{ N/mm}^2$

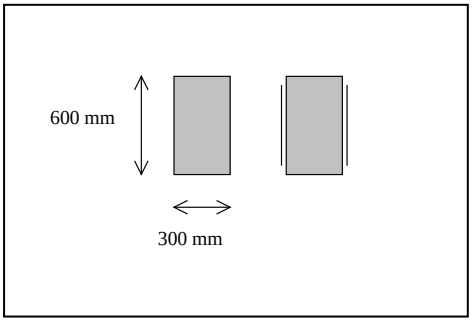
De beton- en staalspanning zijn kleiner dan de maximaal toelaatbare spanning.

Voorbeeld 9: Betonnen balk versterkt met stalen platen gelijmd op de zijkanten
Een betonnen balk heeft een breedte van 300 mm en een hoogte van 600 mm. De betonkwaliteit is C20/25. Oorspronkelijk werd de balk berekend op een moment van M_d = 180 kNm. De spanning in de uiterste vezels is gelijk aan:

$$\sigma_c = M/W = 180 \times 10^6/(300\times600^2/6) = 10 \text{ N/mm}^2 < f_{cd} = 13.3 \text{ N/mm}^2$$

De balk wordt versterkt met twee stalen platen 5 × 500 mm^2, S235, welke op de zijkanten worden gelijmd. De elasticiteitsmodulus van het staal is gelijk aan: $E_s = 2.1 \times 10^5$ N/mm^2

Figuur 14. De doorsnede van de onversterkte balk en de doorsnede van de versterkte balk.



De staalplaten zijn veel stijver dan het beton. Bovendien neemt door kruip de stijfheid van het beton af. Door de kruip van het beton mag neemt de elasticiteitsmodulus van het beton af tot: $E_{ct} = 10^4$ N/mm^2. Bepaal de toename van het draagvermogen.

De stijfheid van de oorspronkelijke constructie is gelijk aan:

$$EI_{ct} = E_{ct} \times b \times h^3/12 = E_{ct} \times 300 \times 600^3/12 = E_{ct} \times 54 \times 10^8 \text{ Nmm}^2$$

De stijfheid van de stalen platen is gelijk aan:

$$EI_s = E_s \times b \times h^3/12 = E_s \times 2 \times 5 \times 500^3/12 = E_s \times 1.04 \times 10^8 \text{ Nmm}^2$$

De stalen platen zijn symmetrisch op de balk gelijmd, het zwaartepunt van de stalen platen is gelijk aan het zwaartepunt van de betonnen balk. De totale stijfheid van de balk wordt:

$$EI = EI_{ct} + EI_s = E_{ct} \times 54 \times 10^8 + E_s \times 1.04 \times 10^8$$

Om de berekening te vereenvoudigen wordt de gelijkwaardigheidcoëfficiënt, de verhouding van de elasticiteitsmodulus van het staal en de elasticiteitsmodulus van het beton, ingevoerd:

$$m = E_s / E_{ct} = 2.1\times10^5/10000 = 21$$

$$EI = EI_{ct} + EI_s = E_{ct} \times 54 \times10^8 + m \times E_{ct} \times 1.04 \times 10^8 = E_{ct} \times 7.584 \times 10^9 \text{ Nmm}^2$$

De stijfheid neemt toe met een factor: $\dfrac{E_{ct} \times 7.584\times10^9}{E_{ct} \times 54 \times 10^8} = 1.4$

De spanning in de uiterste vezel van het beton aan de boven en onderzijde in de versterkte balk volgt uit:

$$\sigma_c = \frac{M \times z \times E_{ct}}{EI} = \frac{M \times 300 \times E_{ct}}{E_{ct} \times 7.584 \times 10^9} \text{ N/mm}^2$$

De oorspronkelijke balk was berekend op een spanning van 10 N/mm^2. Deze waarde wordt nu ingevuld in de bovenstaande vergelijking. Het opneembare moment van de versterkte constructie is dan:

$$M = 10 \times 7.548 \times 10^9/300 = 253 \times 10^6 \text{ Nmm} = 253 \text{ kNm}.$$

Het opneembare moment neemt toe met een factor: 253/180 = 1.4

De spanning in de uiterste vezel van het staal aan de boven en onderzijde volgt uit:

$$\sigma_s = \frac{M \times z \times m \times E_{ct}}{EI} = \frac{253 \times 10^6 \times 250 \times 21 \times E_{ct}}{E_{ct} \times 7.548 \times 10^9} = 176 < 235 \text{ N/mm}^2$$

De maximale spanning in het staal S235 is 235 N/mm^2. De staalspanning is lager dan de uiterste spanning. De belasting kan met een factor 1.4 verhoogd worden. Voor betonconstructies is het effectiever om de balk te versterken met een plaat bevestigd aan de onderzijde, de getrokken zijde dan met platen gelijmd op de zijkanten.

Voorbeeld 10, Balk versterkt met een stalen plaat gelijmd op de onderzijde

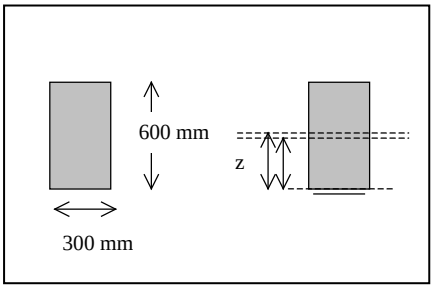
Een betonnen balk heeft een breedte van 300 mm en een hoogte van 600 mm. De betonkwaliteit is B25. Oorspronkelijk werd de balk berekend op een moment van M_d = 180 kNm. De spanning in de uiterste vezels is dan:

$$\sigma_c = M/W = 180 \times 10^6/(300 \times 600^2/6) = 10 \text{ N/mm}^2 < f'_c = 13.3 \text{ N/mm}^2$$

De balk wordt versterkt met een stalen plaat 5 × 200 mm^2, S235, welke op de onderzijde wordt gelijmd. De elasticiteitsmodulus van het staal is: $E_s = 2.1 \times 10^5$ N/mm^2.

Door kruip neemt de stijfheid van het beton af. Stel dat de elasticiteitsmodulus van het beton inclusief kruipeffect gelijk is aan: $E_{ct} = 10^4$ N/mm^2.

In welke mate neemt de doorsnedencapaciteit toe?



Figuur 15. Doorsnede van de onversterkte balk en de doorsnede van de balk versterkt met een plaat aan de onderzijde.

De stijfheid van de oorspronkelijke constructie is gelijk aan:

$$EI_{ct} = E_{ct} \times b \times h^3/12 = E_{bt} \times 300 \times 600^3/12 = E_{bt} \times 5.4 \times 10^9 \text{ Nmm}^2$$

De staalplaat is tegen de onderzijde gelijmd, het zwaartepunt van de constructie verplaatst als het ware naar de stalen plaat toe. Om de berekening te vereenvoudigen wordt de gelijkwaardigheid-coëfficiënt m , de verhouding van de elasticiteitsmodulus van het staal en de elasticiteitsmodulus van het beton, ingevoerd: $m = E_s/E_{ct} = 2.1 \times 10^5/10000 = 21$.

Het zwaartepunt z van de samengestelde constructie wordt als volgt berekend ten opzichte van de onderkant van de betonnen balk:

$$z = \frac{E_{ct} \times A_b \times ½\, h - m \times E_{ct} \times A_s \times ½\, t}{E_{ct} \times A_b + m \times E_{ct} \times A_s}$$

$$z = \frac{300 \times 600 \times 300 - 21 \times 200 \times 5 \times ½ \times 5}{300 \times 600 + 21 \times 200 \times 5} = 268 \text{ mm}$$

Door het versterken verschuift het zwaartepunt omlaag over 300 – 268 = 32 mm ten opzichte van het midden van de balk. De stijfheid van de versterkte balk volgt uit:

$$EI = E_{ct} \times [b \times h^3/12 + A_c \times 32^2 + m \times b_s \times t^3/12 + m \times b_s \times t \times (268 + ½ \times t)^2]$$

$$EI = E_{ct} \times [300 \times 600^3/12 + 300 \times 600 \times 32^2 + 21 \times 200 \times 5^3/12 + 21 \times 200 \times 5 \times (270.5)^2]$$

$$EI = E_{ct} \times 7.12 \times 10^9 \text{ Nmm}^2$$

De betonspanning in de onderzijde van de balk wordt: $\sigma = M \times z \times E_{bt}/(EI)$

$$\sigma_c = \frac{M \times 268 \times E_{ct}}{E_{ct} \times 7.12 \times 10^9} \text{ N/mm}^2$$

De oorspronkelijke spanning waarop de balk werd berekend was: $\sigma = 10$ N/mm^2. Uitgaande van deze spanning wordt het opneembare moment:

$$M = \frac{10 \times 7.12 \times 10^9}{268} = 266 \times 10^6 \text{ Nmm} = 266 \text{ kNm}$$

Het opneembare moment neemt toe met een factor: 266/180 = 1.48

De staalspanning wordt: $\sigma_s = M \times z \times m \times E_{bt}/(EI) =$

$$\sigma_s = \frac{M \times (257 + 5) \times 21 \times E_{ct}}{E_{ct} \times 7.12 \times 10^9} \text{ N/mm}^2$$

Voor M = 266 kNm, $\sigma_s = \frac{M \times (257 + 5) \times 21 \times E_{ct}}{E_{ct} \times 7.12 \times 10^9} = 206 < 235$ N/mm^2

De staalspanning is kleiner dan de maximale staalspanning $f_s = 235$ N/mm^2. De belasting op de samengestelde constructie kan met een factor 1.4 worden verhoogd.

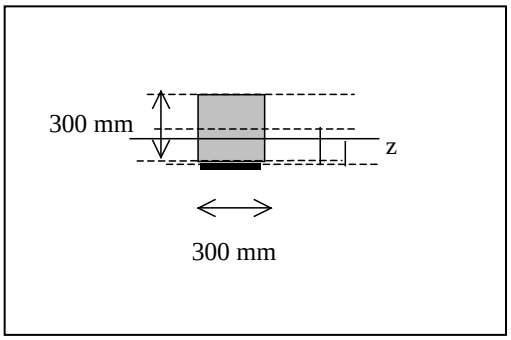
<u>Opmerking</u>
Bij het versterken van de balk is alleen de toename van het opneembare moment bepaald. In principe moet ook de vervorming en de dwarskrachtcapaciteit gecontroleerd worden. De dwarskrachtcapaciteit neemt voor de eerste twee versterkte balken sterk toe. De dwarskrachtcapaciteit van de balk versterkt met een plaat aan de onderzijde zal slechts weinig toenemen.

Figuur 13: Onderstempeling bij het versterken van een constructie met Refor-tec, bron: Balm

Voorbeeld 11: Kolom asymmetrisch versterkt met één stalen plaat

Een betonnen kolom heeft een doorsnede van 300 × 300 mm^2. De betonkwaliteit is C20/25. De kolom wordt versterkt met een stalen plaat 20 × 200 mm^2, S235, welke op de zijkant wordt gelijmd. De elasticiteitsmodulus van het staal is: $E_s = 2.1 \times 10^5$ N/mm^2. De kolom wordt centrisch belast met een normaalkracht N_d = 900 kN.

Figuur 14. Doorsnede van de versterkte kolom



De staalplaat is stijver dan het beton. Bovendien neemt door kruip de stijfheid van het beton af. Stel dat de elasticiteitsmodulus van het beton, inclusief het kruipeffect, gelijk is aan: E_{bt} = 10000 N/mm^2.

Bereken de spanningen in de versterkte kolom en het aangrijpingspunt van de kracht.

Om de berekening te vereenvoudigen wordt de gelijkwaardigheidcoëfficiënt, de verhouding van de elasticiteitsmodulus van het staal en de elasticiteitsmodulus van het beton, ingevoerd:

$$m = E_s/E_{ct} = 2.1\times10^5/10000 = 21$$

De constructie is samengesteld uit twee verschillende materialen. De doorsnede wordt alleen door een normaalkracht belast, zodat de specifieke vervorming ε voor beide doorsneden gelijk is.

De kracht op te nemen met het beton is: $F_c = A_c\times\sigma_{ct} = E_{ct}\times\varepsilon\times A_c$

De kracht op te nemen met het staal is: $F_s = A_s\times\sigma_s = E_s\times\varepsilon\times A_s = m\times E_{ct.}\times\varepsilon\times A_s$

De specifieke vervorming volgt uit het krachten evenwicht: $F_c + F_s = N_d$

Substitueer in deze vergelijking de krachten F_c en F_s:

$$E_{ct}\times\varepsilon\times A_c + m\times E_{ct}\times\varepsilon\times A_s = N_d$$

De specifieke vervorming is dan gelijk aan: $\varepsilon = N_d/(E_{ct}\times A_c + m\times E_{ct.}\times A_s)$

De spanningen in de beton en staal doorsnede volgt uit de wet van Hooke:

Beton: $\sigma_c = E_{ct} \times \varepsilon = E_{ct} \times N_d / [E_{ct} \times (A_c + m \times A_s)]$ => $\sigma_c = N_d / (A_b + m.A_s)$

Staal: $\sigma_s = m \times E_{ct} \times \varepsilon = m \times E_{ct} \times N_d / [E_{ct} \times (A_c + m \times A_s)]$ => $\sigma_s = m \times N_d / (A_b + m \times A_s)$

De noemer van de breuk wordt de initiële oppervlakte genoemd, deze wordt berekend met:

$$(A_c + m.A_s) = (300 \times 300 + 21 \times 200 \times 20) = 17.4 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

De spanning in de betonconstructie en in de strip zijn:

$$\sigma_c = N_d / (A_b + m.A_s) = 900000 / (174000) = 5.2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = m \times N_d / (A_b + m.A_s) = 21 \times 900000/174000 = 109 \text{ N/mm}^2$$

De kolom wordt belast met een centrische normaalkracht. Deze grijpt aan in het zwaartepunt van de samengestelde constructie. Het zwaartepunt van de samengestelde constructie volgt uit:

$$z = \frac{A_b \times z_b - m \times A_s \times \frac{1}{2} t}{(A_b + m.A_s)}$$

Zwaartepunt afstand ten opzichte van de aansluiting beton-staal:

$$z = \frac{300 \times 300 \times 150 - 21 \times 200 \times 20 \times 10}{300 \times 300 + 21 \times 200 \times 20} = 73 \text{ mm}$$

Door het versterken verschuift het zwaartepunt over 150 - 73 = 78 mm ten opzichte van het hart van de betondoorsnede in de richting van de stalen plaat. Als de belasting in het zwaartepunt van de betondoorsnede aangrijpt en de reactie aangrijpt in het zwaartepunt van de samengestelde constructie dan ontstaat er een moment en wordt de doorsnede tevens belast met buigspanningen.